Тема 9. Числові характеристики випадкових векторів. Умовні закони розподілу. Математичне сподівання. Коваріація, коефіцієнт кореляції. Умовні закони розподілу і їх характеристика.

Теоретичні відомості

Законом розподілу двох дискретних випадкових величин називають перелік можливих значень $Y = y_i$, $X = x_j$ та відповідних їм імовірностей спільної появи.

$$M(X) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} x_j p_{ij} = \sum_{j=1}^{m} x_j p_{x_j}.$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X)$$

$$\sigma(X) = \sigma_x = \sqrt{D(X)}.$$

$$M(Y) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_i p_{ij} = \sum_{i=1}^{k} y_i p_{y_i}.$$

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y)$$

$$\sigma(Y) = \sigma_y = \sqrt{D(Y)}.$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Задано закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин (X, Y):

$X = x_j$ $Y = y_i$	5,2	10,2	15,2	P_{yi}
2,4	$0{,}1a$	$2a$	$0{,}9a$	
4,4	$2a$	$0{,}2a$	$1{,}8a$	
6,4	$1{,}9a$	$0{,}8a$	$0{,}3a$	
P_{xj}				

Знайти a. Обчислити $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(X)$; $M(Y)$; $D(Y)$; $\sigma(Y)$; K_{xy}; r_{xy};

Розв'язання. Скориставшись умовою нормування дістанемо:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} P_{ij} = 0{,}1a + 2a + 0{,}9a + 2a + 0{,}2a + 1{,}8a + 1{,}9a + 0{,}8a + 0{,}3a = 1 \Rightarrow a = 0{,}1.$$

Зі знайденим a закон системи набирає такого вигляду:

$X = x_j$ $Y = y_i$	5,2	10,2	15,2	P_{yi}

2,4	0,01	0,2	0,09	0,3
4,4	0,2	0,02	0,18	0,4
6,4	0,19	0,08	0,03	0,3
P_{xj}	0,4	0,3	0,3	

Обчислюємо основні числові характеристики:

$$M(X)=\sum_{j=1}^{3}x_j p_{x_j}=5,2\cdot 0,4+10,2\cdot 0,3+15,2\cdot 0,3=2,08+3,06+4,56=9,7;$$

$$M(X^2)=\sum_{j=1}^{3}x_j^2 p_{x_j}=(5,2)^2\,0,4+(10,2)^2\,0,3+(15,2)^2\;0,3=$$

$$=10,816+31,212+69,312=111,34;$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=111,34-94,09=17,25;$$

$$\sigma_x=\sqrt{D(X)}=4,15;$$

$$M(Y)=\sum_{i=1}^{3}y_i p_{y_i}=2,4\cdot 0,3+4,4\cdot 0,4+6,4\cdot 0,3=0,72+1,76+1,92=4,4;$$

$$M(Y^2)=\sum_{i=1}^{3}y_i^2\,p_{y_i}=(2,4)^2\,0,3+(4,4)^2\,0,4+(6,4)^2\,0,3=$$

$$=1,728+7,744+12,288=21,76;$$

$$D(Y)=M(Y^2)-M^2(Y)=21,76-(4,4)^2=21,76-19,36=2,4;$$

$$\sigma_y=\sqrt{D(Y)}=1,55;$$

$$M(XY)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}y_i x_j p_{ij}=2,4\cdot 5,2\cdot 0,01+2,4\cdot 10,2\cdot 0,2+2,4\cdot 15,2\cdot 0,09+$$

$$+4,4\cdot 5,2\cdot 0,2+4,4\cdot 10,2\cdot 0,02+4,4\cdot 15,2\cdot 0,18+6,4\cdot 5,2\cdot 0,19+$$

$$+6,4\cdot 10,2\cdot 0,08+6,4\cdot 15,2\cdot 0,03=0,1248+4,896+3,2832+4,576+$$

$$+0,8976+12,0384+6,3232+5,2224+2,9184=40,28;$$

$$K_{xy}=M(XY)—M(X)\,M(Y)=40,28-9,7\cdot 4,4=40,28-42,68=1,4.$$

Оскільки $K_{xy}>0$, то між відповідними величинами існує кореляційний зв’язок. Для вимірювання тісноти кореляційного зв’язку обчислимо коефіцієнт кореляції

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{-2,4}{4,15\cdot 1,55}\approx 0,37.$$

Задачі

9.1. Закон системи двох дискретних випадкових величин (X, Y) заданий таблицею:

$Y \backslash X$	2	4	6	8	p_{y_i}
– 6	0,1a	0,5a	0,4a	a	
– 4	0,9a	0,4a	0,5a	0,2a	
– 2	a	2,1a	1,1a	1,8a	
p_{x_i}					

Обчислити r_{xy}, $M(X / y = 4)$, $M(Y / x = -2)$.

9.2. Виготовлені на заводі циліндри сортуються за відхиленням їх внутрішніх діаметрів від номінального розміру на чотири групи зі значеннями 0,01; 0,02; 0,03; 0,04 мм і за овальністю на чотири групи зі значенями 0,002; 0,004; 0,006; 0,008 мм. Спільний розподіл цих відхилень X — діаметра і Y — овальності циліндрів наведено в таблиці:

$Y \backslash X$	0,01	0,02	0,03	0,04	p_{y_i}
0,002	0,01	0,02	0,04	0,04	
0,004	0,03	0,24	0,15	0,06	
0,006	0,04	0,1	0,08	0,08	
0,008	0,02	0,04	0,03	0,02	
p_{x_j}					

Знайти r_{xy}.