

Тема 7. Випадкові величини. Неперервні випадкові величини. Неперервні розподіли.

Теоретичні відомості

Для неперервних випадкових величин закон розподілу ймовірностей зручно описувати з допомогою щільності ймовірностей, яку позначають $f(x)$.

Властивості щільності:

1. $f(x) \geq 0$. Ця властивість випливає з означення щільності ймовірності як першої похідної від $F(x)$ за умови, що $F(x)$ є неспадною функцією.

2. Умова нормування неперервної випадкової величини X :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

3. Імовірність попадання неперервної випадкової величини в інтервалі $[\alpha; \beta]$ обчислюється за формулою

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

4. Функція розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини має вигляд

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Закон неперервної випадкової величини X задано у вигляді:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{2} \sin x, & 0 < x \leq \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Знайти $F(x)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$. Обчислити

$$P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{2}\right).$$

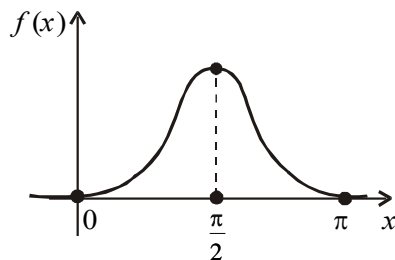
Розв'язання. Згідно із властивістю 4 щільності маємо:

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx = \int_0^x \frac{1}{2} \sin dx = \frac{1}{2} \int_0^x \sin dx = \frac{1}{2} (-\cos x|_0^x) = \frac{1}{2} (-\cos x + 1) = \frac{1 - \cos x}{2}.$$

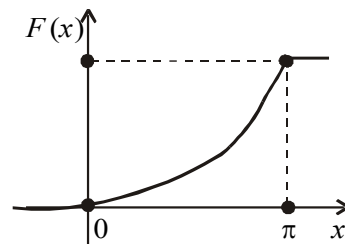
Отже, функція розподілу ймовірностей буде така:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x), & 0 < x \leq \pi; \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

Графіки функцій $f(x)$, $F(x)$ зображені відповідно на мал. 2 і 3.



Мал. 2



Мал. 3

Застосуємо 3 властивість щільності:

$$P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{4}\right) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}.$$

Задачі

7.1. Задано функцію розподілу ймовірностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 1, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти $f(x)$. Побудувати графіки $F(x)$, $f(x)$ і обчислити $P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{3}\right)$.

7.2. Випадкова величина X має закон розподілу ймовірностей Коші:

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Знайти a і $F(x)$.

7.3. Крива щільності ймовірності — півеліпс із півосями $a = 4$; $b = 2$.

Записати вираз для $f(x)$ і $F(x)$.

Побудувати графік функції $F(x)$.

7.4. Закон розподілу неперервної випадкової величини X такий:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{(x+1)^3}{64}, & -1 < x \leq 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Знайти $f(x)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$, $P(0 < X < 2)$.