

Тема 4. Формули повної ймовірності. Формули Байєса.

Теоретичні відомості

У разі, коли випадкова подія A може відбутися лише за умови, що відбудеться одна з несумісних випадкових подій B_i , які утворюють повну групу і між собою є попарно несумісними

$\left(B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, \dots, n, \bigcup_{i=1}^n \hat{A}_i = \Omega \right)$, імовірність події A обчислюється за

формулою $P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) P(A/B_i)$, яка називається *формулою повної ймовірності*.

Застосовуючи формулу множення ймовірностей для залежних випадкових подій $A, B_i (i = \overline{1, n})$, дістаємо *формули Байєса*

$$P(B_i/A) = \frac{P(\hat{A}_i) P(A/\hat{A}_i)}{\sum_{i=1}^n P(\hat{A}_i) P(A/\hat{A}_i)}$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. На склад надходять однотипні вироби з чотирьох заводів: 15% — із заводу № 1, 25% — із заводу № 2; 40% — із заводу № 3 і 20% — із заводу № 4. Під час контролю продукції, яка надходить на склад, установлено, що в середньому брак становить для заводу № 1 — 3%, заводу № 2 — 5%, заводу № 3 — 8% і заводу № 4 — 1%. Навмання взятий виріб зі складу виявився бракованим. Яка ймовірність того, що його виготовив завод №1?

Розв'язання. Позначимо B_1 гіпотезу проте, що виріб був виготовлений заводом № 1, B_2 — заводом № 2, B_3 — заводом № 3 і B_4 — заводом № 4. Ці гіпотези єдино можливі і несумісні. Нехай A — випадкова подія, що полягає в появі бракованого виробу.

За умовою задачі маємо:

$P(B_1) = 0,15, P(B_2) = 0,25, P(B_3) = 0,4, P(B_4) = 0,2, P(A/B_1) = 0,03, P(A/B_2) = 0,05, P(A/B_3) = 0,08, P(A/B_4) = 0,01.$

За формулою Байєса переоцінюємо першу гіпотезу B_1 :

$$P(B_1/A) = \frac{D(\hat{A}_1) D(\hat{A} / \hat{A}_1)}{D(\hat{A}_1) D(\hat{A} / \hat{A}_1) + D(\hat{A}_2) D(\hat{A} / \hat{A}_2) + D(\hat{A}_3) D(\hat{A} / \hat{A}_3) + D(\hat{A}_4) D(\hat{A} / \hat{A}_4)} =$$

$$= \frac{0,15 \cdot 0,03}{0,15 \cdot 0,03 + 0,25 \cdot 0,05 + 0,4 \cdot 0,08 + 0,2 \cdot 0,01} = \frac{0,0045}{0,051} = \frac{45}{510} = \frac{3}{34}.$$

Задачі

4.1. Маємо дві партії деталей. Перша складається з 15 стандартних і 4 нестандартних, друга — із 10 стандартних і 3 нестандартних. Із першої партії береться одна деталь і перекладається у другу. Знайти ймовірність того, що деталь, яку після цього взяли із другої партії :

1) стандартна; 2) нестандартна.

4.2. Маємо три партії деталей. Перша складається з 10 стандартних і 4 нестандартних, друга — із 14 стандартних і 4 нестандартних, третя — із 16 стандартних і 5 нестандартних деталей. Із навмання вибраної партії береться деталь. Знайти ймовірність того, що деталь буде:

1) стандартною; 2) нестандартною.

4.3. Металеві заготовки для подальшої обробки надходять із двох цехів: 55 % із першого, 45 % із другого. При цьому продукція з першого цеху містить 3 %, а з другого цеху — 5 % браку. Знайти ймовірність того, що заготовка, яка надійшла на обробку:

1) придатна; 2) бракована.

4.4. На склад надходить продукція від двох підприємств. Від першого — 60 %, від другого — 40 %. Перше підприємство дає 80 % продукції 1-го сорту і 20 % 2-го сорту, а друге дає 70 % продукції 1-го сорту і 30 % 2-го сорту. Знайти ймовірність того, що навмання взята одиниця продукції буде:

1) першого сорту; 2) другого сорту.

4.5. Для посіву пшениці заготовлено насіння, серед якого 95 % 1-го сорту, 3 % 2-го та 2 % 3-го сорту. Імовірність того, що з насінини виросте колосок, в якому не менш ніж 50 зерен, для 1-го сорту насіння становить 0,5, для 2-го сорту — 0,2, для 3-го — 0,1. Знайти ймовірність того, що навмання взятий колосок у разі такого посіву матиме не менш як 50 зерен.