

Тема 3. Умовні ймовірності. Незалежність подій.

Теоретичні відомості

Якщо ймовірність випадкової події A обчислюється за умови, що подія B відбулася, то така ймовірність називається *умовною*. Ця ймовірність обчислюється за формулою

$$P(A/B) = \frac{D(\hat{A} \cap \hat{A})}{D(\hat{A})}, \quad P(B) \neq 0.$$

Випадкові події A і B називають *залежними*, якщо поява однієї з них (A або B) впливає на ймовірність появи іншої.

У протилежному випадку випадкові події A і B називаються *незалежними*.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Задана множина цілих чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Навмання беруть одне число. Яка ймовірність того, що це число виявиться кратним 3, коли відомо, що воно є непарним?

Розв'язання. Нехай подія A — поява числа кратного 3, B — кратного 2. Тоді $A = (3, 6, 9, 12)$, $m_1 = 4$; $B = (2, 4, 6, 8, 10, 12)$, $m_2 = 6$; $A \cap B = (6, 12)$, $m_3 = 2$;

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}; \quad P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}; \quad P(A \cap B) = \frac{m_3}{n} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6};$$

$$P(A/B) = P(A/B) = \frac{D(\hat{A} \cap \hat{A})}{D(\hat{A})} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Приклад 2. Відомі значення:

$$P(A \cap \bar{B}) = 0,3; \quad P(\bar{A} \cap B) = 0,4; \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,9.$$

З'ясувати, чи є залежними випадкові події A і B .

Розв'язання.

$$P(A \cap B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,9 = 0,1;$$

$$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) = 0,3 + 0,1 = 0,4;$$

$$P(B) = P(B \cap \bar{A}) + P(A \cap B) = 0,4 + 0,1 = 0,5;$$

$$P(A/B) = \frac{D(\hat{A} \cap \hat{A})}{D(\hat{A})} = \frac{0,1}{0,5} = \frac{1}{5} = 0,2;$$

$$P(B/A) = \frac{D(\hat{A} \cap \hat{A})}{D(\hat{A})} = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Оскільки $P(A/B) \neq D(\hat{A})$, $D(\hat{A}) \neq D(\hat{A}/\hat{A})$, то випадкові події A і B є залежними.

Задачі

3.1. Імовірність безвідказної роботи блока, що входить у систему впродовж певного часу дорівнює 0,9. Для надійності роботи системи встановлюється такий же блок, що буде знаходитись у резерві. Яка ймовірність безвідмовної роботи системи, коли при цьому враховувати резервний блок?

3.2. Радіолокаційна система, до якої входять дві станції, що працюють самостійно, виконує деяке завдання з виявлення літака-порушника повітряного простору України на певній ділянці кордону. Для виконання цього завдання необхідно, щоб у справному стані була хоча б одна радіолокаційна станція. Імовірність безвідказної роботи першої станції дорівнює 0,95, а другої 0,85. Система працюватиме надійно, якщо буде справною хоча б одна радіолокаційна станція. Знайти ймовірність цієї події.

3.3. В урні міститься 4 зелених і 8 червоних кульок. Кульки із урни виймають по одній без повернення. Таким способом було вийнято три кульки. Обчислити ймовірності таких випадкових подій A — перша кулька буде червоною, друга — зеленою, третя — червоною.

3.4. Відомо, що $A \cap B \neq \emptyset$. Довести, що

$$p(B/A) \geq 1 - \frac{p(\bar{A})}{p(\hat{A})}.$$