

## Тема 2. Алгебра подій. Аксиоми теорії ймовірностей.

### Теоретичні відомості

**Додавання.** Сумою двох подій  $A$  і  $B$  називається така подія  $C = A \cup B$  ( $C = A + B$ ), яка внаслідок експерименту настає з настанням принаймні однієї з подій  $A$  або  $B$ .

**Множення.** Добутком двох подій  $A$  і  $B$  називається така подія  $C = A \cap B$  ( $C = AB$ ), яка внаслідок експерименту настає з одночасним настанням подій  $A$  і  $B$ .

**Віднімання.** Різницею двох подій  $A$  і  $B$  називається така подія  $C = A \setminus B$  ( $C = A - B$ ), яка внаслідок експерименту настає з настанням події  $A$  і одночасним ненастанням події  $B$ .

Події  $A$  і  $\bar{A}$  називаються *протилежними*, якщо вони несумісні й утворюють повну групу подій, тобто  $A \cap \bar{A} = \emptyset$  і  $A \cup \bar{A} = \Omega$ .

Якщо  $A \cap B \neq \emptyset$ , то випадкові події  $A$  і  $B$  називають *сумісними*.

Якщо  $A \cap B = \emptyset$ , то такі випадкові події  $A$  і  $B$  називають *несумісними*.

### Теорема множення ймовірностей

Нехай подія  $A$  є добутком двох подій  $B$  і  $C$ . Тоді:

а) якщо події  $B$  і  $C$  незалежні, то  $P(A) = P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$ ;

б) якщо події  $B$  і  $C$  залежні, то  $P(A) = P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C|B)$ .

Ці теореми справджуються й для добутку  $n$  ( $n > 2$ ) подій.

### Приклади розв'язування задач

**Приклад 1.** Задано множину цілих чисел  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ . Навмання з неї беруть одне число.

Побудувати випадкові події: 1)  $A$  — узятє число кратне 2;  
2)  $B$  — кратне 3.

Визначити  $A \cup B$ ;  $A \cap B$ ;  $A \setminus B$ .

**Розв'язання.** 1)  $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ ; 2)  $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ .

Звідси дістаємо:

$$A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \cup \{3, 6, 9, 12, 15\} = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\};$$

$$A \cap B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \cap \{3, 6, 9, 12, 15\} = \{6, 12\};$$

$$A \setminus B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \setminus \{3, 6, 9, 12, 15\} = \{2, 4, 8, 10, 14\}.$$

**Приклад 2.** Партія містить 12 стандартних і чотири нестандартні деталі. Навмання беруть три деталі. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей:

- 1) не менш як дві стандартні;
- 2) усі три нестандартні;
- 3) принаймні одна стандартна.

**Розв'язання.** 1) Нехай подія  $A$  — «серед трьох узятих деталей не менш як дві стандартні». Тоді її можна подати як суму двох подій:  $A_1$  — «серед трьох узятих деталей дві стандартні і одна нестандартна» і  $A_2$  — «усі три узяті деталі стандартні». Події  $A_1$  і  $A_2$  несумісні, тому маємо:

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

Ймовірності подій  $A_1$  і  $A_2$  знайдемо згідно з класичним означенням імовірності.

$$n = C_{16}^3 = 560; \quad m_1 = C_{12}^2 \cdot C_4^1 = 66 \cdot 4 = 264; \quad m_2 = C_{12}^3 = 220.$$

$$\text{Отже, } P(A) = \frac{484}{560} \approx 0,864.$$

## Задачі

2.1. У партії із 20 деталей 15 стандартних, а решта нестандартні. Навмання беруть чотири деталі. Знайти ймовірність того, що серед них:

- 1) не більше як дві нестандартні;
- 2) усі чотири стандартні;
- 3) принаймні одна нестандартна.

2.2. У цеху з восьми зупинок верстата в середньому чотири зумовлюються заміною різця; дві — несвоєчасним надходженням заготовок; решта — іншими причинами. Знайти ймовірність зупинки верстата з інших причин.

2.3. У разі масового виготовлення виробів брак становить у середньому 1,5 % загальної кількості всіх виробів. З-поміж придатних виробів 85,3 % становлять вироби 1-го сорту. Знайти ймовірність того, що навмання взятий виріб належить до 1-го сорту.

2.4. Довести, що добуток імовірностей протилежних подій не перевищує 0,25.

2.5. Партія складається з двох деталей 1-го сорту, двох 2-го сорту і трьох — 3-го сорту. Деталі беруть по одній навмання без повернення. Знайти ймовірність того, що деталь 1-го сорту з'явиться раніше за деталь 3-го сорту.

2.6. У цеху є три резервні мотори, для кожного з яких імовірність бути ввімкненим у даний момент дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що в даний момент ввімкнено:

- 1) принаймні два мотори;
- 2) принаймні один мотор.