Лекція 30. Перевірка правильності нульової гіпотези

План

1. Перевірка правильності нульової гіпотези про рівність математичних сподівань

2. Малий обсяг вибірки ($n' < 40,\ n'' < 40$ ***) і невідомі значення дисперсій генеральної сукупності***

3. Перевірка правильності нульової гіпотези про рівність двох дисперсій

4. Критерій узгодженості Пірсона

1. Перевірка правильності нульової гіпотези про рівність математичних сподівань

Нехай задано дві генеральні сукупності, ознаки яких X і Y мають нормальний закон розподілу і при цьому незалежні одна від одної. Необхідно перевірити правдивість $H_0 : M(X) = M(Y) \quad (\bar{X}_{\Gamma} = \bar{Y}_{\Gamma})$.

Тут можуть спостерігатися два випадки:

В и п а д о к 1. Обсяг вибірки великий ($n > 40$) і відомі значення D_x, $D_Г$ ознак генеральних сукупностей.

З кожної генеральної сукупності здійснюють вибірку відповідно з обсягами n' і n'' і будують статистичні розподіли:

x_i	x_1	x_2	x_3	....	x_k
n'_i	n'_1	n'_2	n'_3	....	n'_k

y_j	y_1	y_2	Y_3	....	y_m
n''_j	n''_1	n''_2	n''_3	....	n''_m

Тут $n' = \sum n'_i, \quad n'' = \sum n''_j$.

Обчислюються значення

$$\bar{x}_Г = \frac{\sum x_i n'_i}{n'}, \qquad \bar{y}_Г = \frac{\sum y_j n''_j}{n''}.$$

Оскільки $D(\bar{x}_Г - \bar{y}_Г) = \frac{D_x}{n'} + \frac{D_y}{n''}$, за статистичний критерій береться випадкова величина

$$Z = \frac{\bar{x}_В - \bar{y}_В}{\sqrt{\frac{D_x}{n'} + \frac{D_y}{n''}}} \tag{30.1}$$

що має закон розподілу $N(0;\ 1)$.

Коли $D_x = D_y = D$, дістанемо:

$$Z = \frac{\bar{x}_В - \bar{y}_В}{\sigma_Г \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \tag{30.2}$$

Залежно від формулювання альтернативної гіпотези H_α будуються відповідно правобічна, лівобічна та двобічна критичні області.

Спостережуване значення критерію відповідно обчислюється:

$$Z^* = \frac{\overline{x}_B - \overline{y}_B}{\sqrt{\frac{D_x}{n'} + \frac{D_y}{n''}}} \tag{30.3}$$

або

$$Z^* = \frac{\overline{x}_B - \overline{y}_B}{\sigma_\Gamma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \tag{30.4}$$

Приклад. За заданими статистичними розподілами двох вибірок, реалізованих із двох генеральних сукупностей, ознаки яких мають нормальний закон розподілу зі значенням дисперсій генеральних сукупностей $D_x = 10;\ D_y = 15$,

x_i	12,2	13,2	14,2	15,2	16,2
n_i'	5	15	40	30	10

y_j	8,4	12,4	16,4	20,4	24,4
n_j''	10	15	35	20	20

при рівні значущості α = 0,01 перевірити правдивість нульової гіпотези
$H_0 : M(X) = M(Y)$, якщо альтернативна гіпотеза
$H_\alpha : M(X) > M(Y)$.

Розв'язання. Оскільки $n' = \sum n_i' = 100;\ n'' = \sum n_j'' = 100$, обчислимо $\overline{x}_B,\ \overline{y}_B$:

$$\overline{x}_B = \frac{\sum x_i n_i'}{n'} = \frac{12,5 \cdot 5 + 13,2 \cdot 15 + 14,2 \cdot 40 + 15,2 \cdot 30 + 16,2 \cdot 10}{100}$$

$$= \frac{62,5 + 198 + 568 + 456 + 162}{100} = \frac{1446,5}{100} = 14,465.$$

$$\overline{y}_B = \frac{\sum y_j n_j''}{n''} = \frac{8,4 \cdot 10 + 12,4 \cdot 15 + 16,4 \cdot 35 + 20,4 \cdot 20 + 24,4 \cdot 20}{100} =$$

$$= \frac{84 + 186 + 574 + 408 + 488}{100} = \frac{1740}{100} = 17,4.$$

Для альтернативної гіпотези $H_\alpha : M(X) > M(Y)$ будується правобічна критична область. Критичну точку $z_{\text{кр}}$ знаходимо з рівності

$$\Phi(z_{\text{кр}}) = \frac{1 - 2\alpha}{2} = \frac{1 - 2 \cdot 0,01}{2} = \frac{0,98}{2} = 0,49 \to z_{\text{кр}} = 2,34.$$

Правобічна критична область зображена на рис. 27.

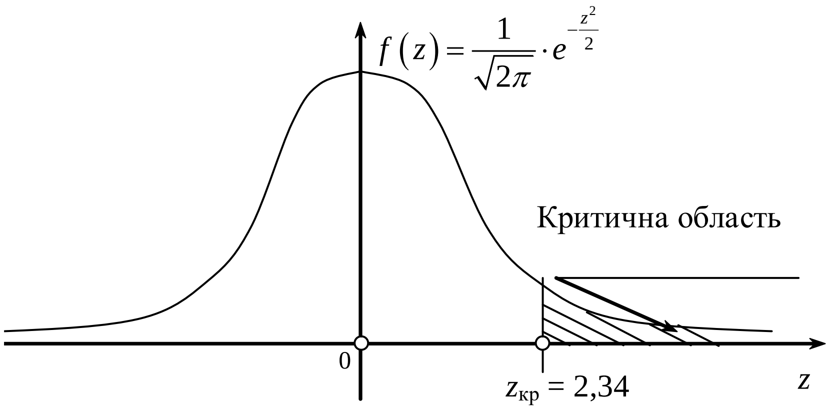

Рис. 27

Обчислимо спостережуване значення критерію

$$Z^*=\frac{\overline{x}_B-\overline{y}_B}{\sqrt{\frac{D_x}{n'}+\frac{D_y}{n''}}}=\frac{14{,}465-17{,}4}{\sqrt{\frac{10}{100}+\frac{15}{100}}}=-\frac{2{,}935}{\sqrt{0{,}1+0{,}15}}=-\frac{2{,}935}{\sqrt{0{,}25}}$$

$$=-\frac{2{,}935}{0{,}5}=-5{,}87.$$

Висновок. Оскільки $Z^*\in]-\infty;2{,}34]$, то $H_0:M(X)=M(Y)$ не відхиляється.

Випадок 2. Якщо обсяг вибірки великий (n > 40), але невідомі значення генеральних дисперсій D_x, D_y, то у цьому випадку застосовують їх точкові незміщені статистичні оцінки, а саме:

$$D(\overline{x}_B-\overline{y}_B)\to S^2=\frac{\sum(x_j-\overline{x}_{\text{В}})\cdot n''_j+\sum(y_i-\overline{y}_{\text{В}})\cdot n'_i}{n'+n''-2}=$$

$$=\frac{(n'-1)S_x^2+(n''-1)S_y^2}{n'+n''-2} \qquad (30.5)$$

При великих обсягах вибірок n', n'' статистичний критерій

$$Z=\frac{\overline{x}_B-\overline{y}_B}{\sqrt{\frac{(n'-1)S_x^2+(n''-1)S_y^2}{n'+n''-2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{n'}+\frac{1}{n''}}} \qquad (30.6)$$

асимптотично наближається до закону розподілу $N(0;1)$. Тому для визначення критичних точок застосовується функція Лапласа.

Приклад. З допомогою двох радіовимірних приладів вимірювалась відстань до певного об’єкта. Результати вимірювання наведені у вигляді двох статистичних розподілів ознак: Y — відстань, виміряна першим радіоприладом, та X — другим. При цьому Y і X є незалежними між собою і підпорядковані нормальному закону розподілу. Статистичні розподіли мають такий вигляд:

y_i, км	195	198	201	204	207	210
n'_i	10	20	30	20	15	5

x_j, км	184	188	192	196	200	204

n''_j	5	15	30	40	6	4

При рівні значущості α = 0,01 перевірити правильність нульової гіпотези

$H_0:\ M(X) = M(Y)$, якщо альтернативна гіпотеза

$H_\alpha : M(Y) > M(X)$.

Розв'язання. Значення дисперсій генеральних сукупностей невідомі. Необхідно обчислити $\overline{x}_B,\ \overline{y}_B,\ S_x^2,\ S_y^2$.

Оскільки $n' = \sum n'_i = n'' = \sum n''_j = 100$, то

$$\overline{x}_B = \frac{\sum x_j\, n''_j}{n''} = \frac{184\cdot 5 + 188\cdot 15 + 192\cdot 30 + 196\cdot 40 + 200\cdot 6 + 204\cdot 4}{100}$$

$$= \frac{920 + 2820 + 5760 + 7840 + 1200 + 816}{100} = \frac{19356}{100} = 193{,}56 \text{ км.}$$

$$\frac{\sum x_j^2\, n''_j}{n''} = \frac{184^2\cdot 5 + 188^2\cdot 15 + 192^2\cdot 30 + 196^2\cdot 40 + 200^2\cdot 6 + 204^2\cdot 4}{100} =$$

$$= \frac{3748464}{100} = 37484{,}64.$$

$$D_B = \frac{\sum x_j^2\, n'_j}{n'} - (\overline{x}_{\text{В}})^2 = 37484{,}64 - (193{,}56)^2 = ;$$

$$= 37484{,}64 - 37465{,}47 = 19{,}17;$$

$$S_x^2 = \frac{n''}{n''-1} D_B = \frac{100}{100-1}\cdot 19{,}17 = 19{,}36;$$

$$S_x = \sqrt{19{,}36} \approx 4{,}4.$$

$$\overline{y}_B = \frac{\sum y_i\, n'_i}{n'} = \frac{195\cdot 10 + 198\cdot 20 + 201\cdot 30 + 204\cdot 20 + 207\cdot 15 + 210\cdot 5}{100} =$$

$$= \frac{1950 + 3960 + 6030 + 4080 + 3105 + 1050}{100} = \frac{20175}{100} = 201{,}75 \text{ км.}$$

$$\frac{\sum y_i^2\, n'_i}{n'} = \frac{195^2\cdot 10 + 198^2\cdot 20 + 201^2\cdot 30 + 204^2\cdot 20 + 207^2\cdot 15 + 210^2\cdot 5}{100} =$$

$$= \frac{4071915}{100} = 40719{,}15;$$

$$D_B = \frac{\sum y_i^2\, n'_i}{n'} - (\overline{y}_{\text{В}})^2 = 40719{,}15 - (201{,}75)^2 = \ = 40719{,}15 - 40703{,}0625 = 16{,}0875;$$

$$S_y^2 = \frac{n'}{n'-1} D_B = \frac{100}{100-1} 16{,}0875 = 16{,}25;$$

$$S_y = \sqrt{16{,}25} \approx 4{,}03.$$

При альтернативній гіпотезі $H_{\alpha}: M(X) > M(Y)$ будуємо правобічну критичну область, критична точка якої, ураховуючи те, що обсяг вибірки великий, знаходиться з рівності

$$\Phi(z_{\text{кр}}) = \frac{1-2\alpha}{2} = \frac{1-2\cdot 0{,}01}{2} = \frac{0{,}98}{2} = 0{,}49 \rightarrow z_{\text{кр}} = 2{,}34.$$

Критична область зображена на рис. 28.

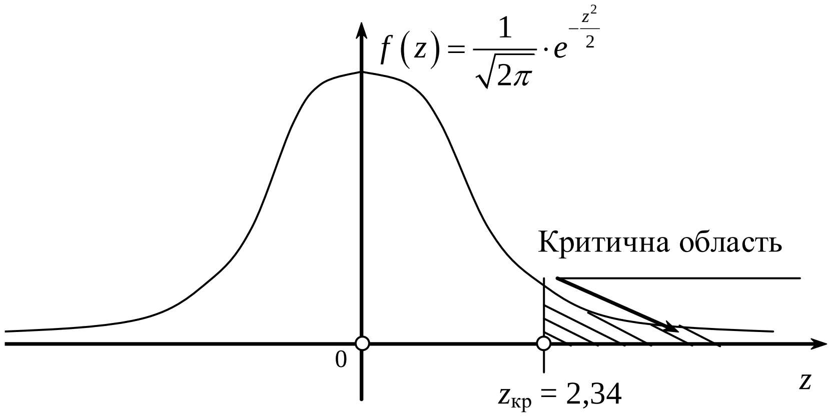

рис.28

Спостережуване значення критерію обчислюється так:

$$Z^* = \frac{\overline{x}_B - \overline{y}_B}{\sqrt{\frac{(n'-1)S_x^2 + (n''-1)S_y^2}{n'+n''-2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n'} + \frac{1}{n''}}} =$$

$$= \frac{193{,}56 - 201{,}75}{\sqrt{\frac{99\cdot 19{,}36 + 99\cdot 16{,}25}{100+100-2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{100} + \frac{1}{100}}} = -\frac{8{,}19}{\sqrt{4{,}215\cdot 0{,}02}} = -\frac{8{,}19}{0{,}29} = -28{,}24.$$

Висновок. Оскільки $Z^* \in \left]-\infty;\ 2{,}34\right]$, то відсутні підстави для відхилення $H_0: M(X) = M(Y)$.

2. Малий обсяг вибірки ($n' < 40,\ n'' < 40$ ***) і невідомі значення дисперсій генеральної сукупності***

При малих обсягах вибірок статистичний критерій

$$z = \frac{\overline{x}_B - \overline{y}_B}{\sqrt{\frac{(n'-1)S_x^2 + (n''-1)S_y^2}{n'+n''-2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n'} + \frac{1}{n''}}} \qquad (30.7)$$

матиме розподіл Стьюдента з $k = n' + n'' - 2$ ступенями свободи. У цьому разі для побудови критичних областей критичні точки знаходять за таблицею (додаток 3).

Приклад. Протягом доби двома приладами вимірювали напругу в електромережі. Результати вимірювання наведено у вигляді статистичних розподілів

y_i	223	227	229	230	235
n_i'	1	2	6	2	1

x_j	216	217	219	228	236

n''_j	2	3	5	1	1

Припускаючи, що випадкові величини X і Y (напруга у вольтах) є незалежними і мають нормальний закон розподілу ймовірностей, за рівня значущості $\alpha = 0{,}001$ перевірити правильність нульової гіпотези $H_0 : M(X) = M(Y)$ при альтернативних гіпотезах:

1) $H_\alpha : M(X) > M(Y)$;

2) $H_\alpha : M(X) \neq M(Y)$.

Розв'язання. Обсяги вибірок відповідно дорівнюють $n' = \sum n'_i = 12$, $n'' = \sum n''_j = 12$.

Обчислимо значення $\bar{x}_B$, $\bar{y}_B$, S_x^2, S_y^2:

$$\bar{y}_B = \frac{\sum y_i n'_i}{n'} = \frac{223\cdot 1 + 227\cdot 2 + 229\cdot 6 + 230\cdot 2 + 235\cdot 1}{12} =$$

$$= \frac{223 + 454 + 1374 + 460 + 235}{12} = \frac{2746}{12} = 228{,}83;$$

$$\frac{\sum y_i^2 n'_i}{n'} = \frac{223^2\cdot 1 + 227^2\cdot 2 + 229^2\cdot 6 + 230^2\cdot 2 + 235^2\cdot 1}{12} =$$

$$= \frac{628458}{12} \approx 52371{,}5;$$

$$D_B = \frac{\sum y_i^2 n'_i}{n'} - (\bar{y}_B)^2 = 52371{,}5 - (228{,}8)^2 = \; = 52371{,}5 - 52349{,}44 = 22{,}06;$$

$$S_y^2 = \frac{n'}{n'-1} D_B = \frac{12}{12-1}\cdot 22{,}06 \approx 24{,}1;$$

$$\bar{x}_B = \frac{\sum x_j n''_j}{n''} = \frac{216\cdot 2 + 217\cdot 3 + 219\cdot 5 + 228\cdot 1 + 236\cdot 1}{12} =$$

$$= \frac{432 + 651 + 1095 + 228 + 236}{12} = \frac{2642}{12} \approx 220{,}17;$$

$$\frac{\sum x_j^2 n''_j}{n''} = \frac{216^2\cdot 2 + 217^2\cdot 3 + 219^2\cdot 5 + 228^2\cdot 1 + 236^2\cdot 1}{12} =$$

$$= \frac{582064}{12} \approx 48505{,}3;$$

$$D_B = \frac{\sum x_j^2 n''_j}{n''} - (\bar{x}_B)^2 = 48505{,}3 - (220{,}17)^2 = \; = 48505{,}3 - 48474{,}83 \approx 30{,}47;$$

$$S_x^2 = \frac{n''}{n''-1} D_B = \frac{12}{12-1}\cdot 30{,}47 \approx 33{,}24.$$

1) Для перевірки правильності нульової гіпотези
$H_0 : M(X) = M(Y)$ при альтернативній гіпотезі

$H_\alpha : M(X) > M(Y)$ будуємо правобічну критичну область. Враховуючи, що статистичний критерій має розподіл Стьюдента з $k = n' + n'' - 2 = 12 + 12 - 2 = 22$ та рівнем значущості $\alpha = 0{,}001$, за таблицею (додаток 3) знаходимо критичну точку $z_{\text{кр}}(\alpha = 0{,}001;\ k = 22) = 3{,}79$.

Правобічна критична область зображена на рис. 29.

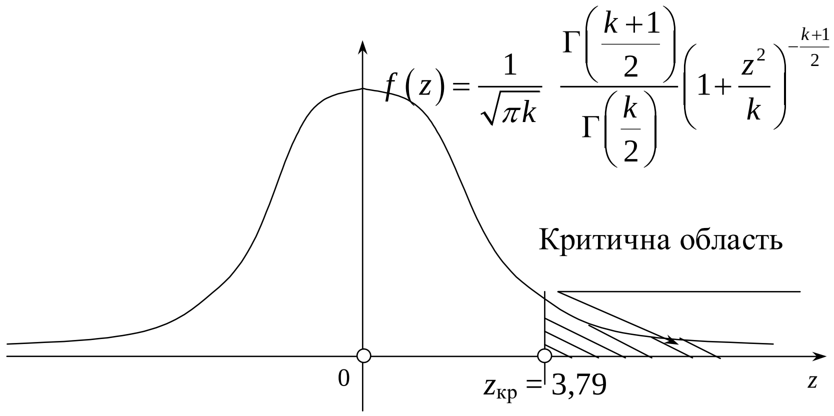

Рис. 29

За формулою (30.7) обчислюємо спостережуване значення критерію

$$z^* = \frac{\bar{x}_B - \bar{y}_B}{\sqrt{\frac{(n'-1)S_x^2 + (n''-1)S_y^2}{n' + n'' - 2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n'} + \frac{1}{n''}}} =$$

$$= \frac{220{,}17 - 228{,}8}{\sqrt{\frac{11 \cdot 33{,}24 + 11 \cdot 24{,}1}{12 + 12 - 2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{12}}} = \frac{8{,}63}{\sqrt{\frac{365{,}64 + 265{,}1}{22}} \sqrt{0{,}17}} =$$

$$= -\frac{8{,}63}{\sqrt{28{,}67 \cdot 0{,}17}} = -\frac{8{,}63}{\sqrt{4{,}8739}} = -\frac{8{,}63}{2{,}21} \approx -3{,}91.$$

Висновок. Оскільки $z^* \in [-\infty; 3{,}79]$, то $H_0:\ M(X) = M(Y)$ приймається.

2) Для альтернативної гіпотези $H_\alpha : M(X) \neq M(Y)$ будується двобічна критична область. Беручи до уваги, що $z'_{\text{кр}} = -z''_{\text{кр}}$, а $z''_{\text{кр}} = 3{,}79$, тоді $z'_{\text{кр}} = -3{,}79$. Двобічна критична область зображена на рис. 30.

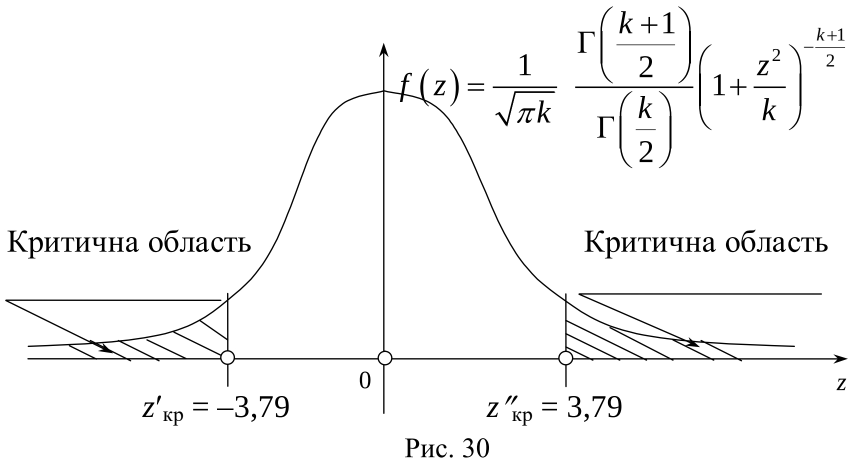

Рис. 30

З попередніх обчислень маємо $z^* = -3{,}91$.

Висновок. Оскільки $z^{*} \in]-3,79; 3,79]$, то в цьому разі немає підстав для прийняття $H_0 : M(X) = M(Y)$.

3. Перевірка правильності нульової гіпотези про рівність двох дисперсій

Одним із важливих завдань математичної статистики є порівняння двох або кількох вибіркових дисперсій. Таке порівняння дає можливість визначити, чи можна вважати вибіркові дисперсії статистичними оцінками однієї і тієї самої дисперсії генеральної сукупності. Воно застосовується передусім при обчисленні дисперсій за результатами технологічних вимірювань.

Порівняння дисперсій D_x, D_y здійснюється зіставленням виправлених дисперсій S_x^2 , S_y^2 , які відповідно мають закон розподілу χ^2 із $k_1 = n' - 1$, $k_2 = n'' - 1$ ступенями свободи, де n' і n'' є обсяги першої і другої вибірок.

Нехай перша вибірка здійснена з генеральної сукупності з ознакою *Y*, дисперсія якої дорівнює D_y , друга — з генеральної сукупності з ознакою *X*, дисперсія якої дорівнює D_x . Необхідно перевірити правильність нульової гіпотези

$$H_0 : D_x = D_y .$$

За статистичний критерій береться випадкова величина $F = \frac{S_\delta^2}{S_m^2}$, яка має розподіл Фішера-Снедекора із k_1 і k_2 ступенями свободи, де S_δ^2 є більшою з виправлених дисперсій, одержаною внаслідок обробки результатів вибірок, S_m^2 є меншою з виправлених дисперсій.

Щільність імовірностей розподілу Фішера-Снедекора

$$f(F) = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)} \cdot \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{\frac{k_2}{2}} \left(F\right)^{\frac{k_2}{2}-1} \left(1 + \frac{k_2}{k_1} F\right)^{-\frac{k_1+k_2}{2}} , \quad F \geq 0$$

визначена лише на додатній півосі, тобто $0 \leq F < \infty$.

Приклад. Під час дослідження стабільності температури в термостаті дістали такі результати: 21,2; 21,8; 21,3; 21,0; 21,4; 21,3.

З метою стабілізації температури було використано удосконалений пристрій, після цього заміри температури показали такі результати: 37,7; 37,6; 37,6; 37,4. Чи можна за рівня значущості $\alpha = 0{,}01$ вважати використання удосконаленого пристрою до стабілізатора температури ефективним?

Розв'язання. Очевидно, що ефективність стабілізаторів без удосконаленого пристрою і з ним залежить від дисперсій вимірюваних ними температур. Отже, задача звелась до порівняння двох дисперсій.

Обчислимо виправлені вибіркові дисперсії

$$\overline{y}_B = \frac{\sum y_i n_i'}{n'} = \frac{21,2 + 21,4 + 21,0 + 21,3 \cdot 2 + 21,8}{6} = 21,333;$$

$$\frac{\sum y_i^2 n_i'}{n'} = \frac{21,2^2 \cdot 1 + 21,4^2 \cdot 1 + 21,0^2 \cdot 1 + 21,3^2 \cdot 2 + 21,8^2 \cdot 1}{6} =$$

$$= \frac{2731,02}{6} = 455,17;$$

$$D_B = \frac{\sum y_i^2 n_i'}{n'} - (\overline{y}_B)^2 = 455,17 - (21,333)^2 = 455,17 - 455,097 = 0,073;$$

$$S_y^2 = \frac{n'}{n'-1} D_B = \frac{6}{6-1} \cdot 0,073 = 0,0876;$$

$$\overline{x} = \frac{\sum x_j n_j''}{n''} = \frac{37,7 + 37,6 \cdot 2 + 37,4}{4} = \frac{37,7 + 75,2 + 37,4}{4} =$$

$$= \frac{150,3}{4} = 37,575;$$

$$\frac{\sum x_j^2 n_j''}{n''} = \frac{37,7^2 \cdot 1 + 37,6^2 \cdot 2 + 37,4^2 \cdot 1}{4} = \frac{5647,57}{4} = 1411,8925;$$

$$D_B = \frac{\sum x_j^2 n_j''}{n''} - (\overline{x}_B)^2 = 1411,8925 - (37,575)^2 =$$

$$= 1411,8925 - 1411,880625 = 0,011875;$$

$$S_x^2 = \frac{n''}{n''-1} D_B = \frac{4}{4-1} \cdot 0,011875 = 0,01583.$$

Обчислимо спостережуване значення критерію

$$F^* = \frac{S_\delta^2}{S_m^2} = \frac{0,0876}{0,01583} = 5,534.$$

Число ступенів свободи для більшої виправленої дисперсії $S_\delta^2 = S_y^2$, $k_1 = n' - 1 = 5$, для меншої $S_m^2 = S_x^2$, $k_2 = n'' - 1 = 3$.

Оскільки удосконалення стабілізатора температур може тільки зменшити дисперсію, то будуємо правобічну критичну область. Отже,

$$H_\alpha : S_y^2 > S_x^2.$$

Критичну точку знаходимо за таблицею (додаток 5) відповідно до заданого рівня значущості $\alpha = 0,01$ і числа ступенів свободи k_1 =5, k_2 =3, $F_{\text{кр}}(\alpha = 0,01;\ k_1 = 5;\ k_2 = 3) = 28,2$.

Схематично правобічна критична область зображена на рис. 31.

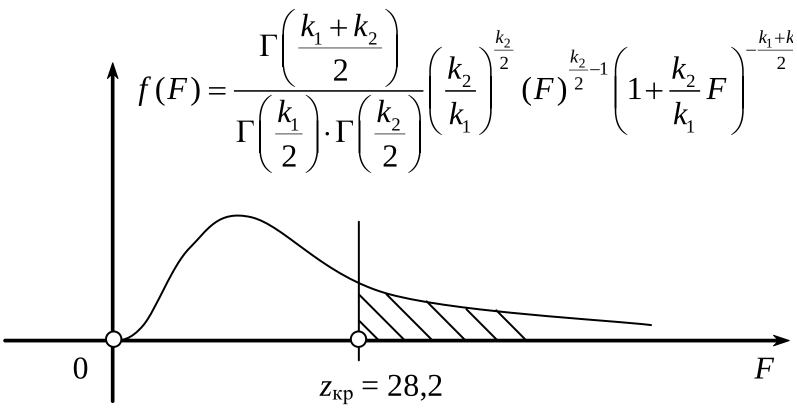

Рис. 31

Висновок. Оскільки $F^* \in]0;\, 28{,}5]$, дані спостережень не дають підстав відхилити нульову гіпотезу, тобто вдосконалення термостабілізатора є ефективним.

4. Критерій узгодженості Пірсона

Критерій узгодженості Пірсона є випадковою величиною, що має розподіл χ^2, який визначається за формулою

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{q}\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i} \tag{30.8}$$

і має $k = q - m - 1$ ступенів свободи,

де q — число часткових інтервалів інтервального статистичного розподілу вибірки;

m — число параметрів, якими визначається закон розподілу ймовірностей генеральної сукупності згідно з нульовою гіпотезою. Так, наприклад, для закону Пуассона, який характеризується одним параметром λ, $m = 1$, для нормального закону $m = 2$, оскільки цей закон визначається двома параметрами $a = M(X)$ і σ.

Якщо $n_i = np_i$ (усі емпіричні частоти збігаються з теоретичними), то $\chi^2 = 0$, у противному разі $\chi^2 > 0$. Визначивши при заданому рівні значущості α і числу ступенів свободи критичну точку $\chi^2_{кр}(\alpha;\ k = q - m - 1)$, за таблицею (додаток 6) будується правобічна критична область. Якщо виявиться, що спостережуване значення критерію $\chi^2_{сп} > \chi^2_{кр}$, то H_0 про закон розподілу ознаки генеральної сукупності відхиляється. У противному разі $\left(\chi^2_{сп} < \chi^2_{кр}\right)$ H_0 приймається.