ТЕМА 5. СТАТИСТИЧНІ ГІПОТЕЗИ

Лекція 29. Статистичні гіпотези.

План

1. Загальна інформація
2. Статистичний критерій
3. Область прийняття гіпотези. Критична область
4. Загальний алгоритм перевірки правильності нульової гіпотези
5. Помилки першого та другого роду. Потужність критерію

1. Загальна інформація

Інформація, яку дістають на підставі вибірки, реалізованої із генеральної сукупності, може бути використана для формулювання певних суджень про всю генеральну сукупність. Наприклад, розпочавши виготовляти покришки нового типу для автомобілів, відбирають певну кількість цих покришок і піддають їх певним тестам.

За результатами тестів можна зробити висновок про те, чи кращі нові покришки від покришок старого типу, чи ні. А це, у свою чергу, дає підставу для прийняття рішення: виготовляти їх чи ні.

Такі рішення називають *статистичними*.

Статистичні рішення мають імовірнісний характер, тобто завжди існує ймовірність того, що прийняті рішення будуть помилковими.

Головна цінність прийняття статистичних рішень полягає в тому, що в межах імовірнісних категорій можна об’єктивно виміряти ступінь ризику, що відповідає тому чи іншому рішенню.

Будь-які статистичні висновки, здобуті на підставі обробки вибірки, називають *статистичними гіпотезами*.

Гіпотезу, що підлягає перевірці, називають *основною*. Оскільки ця гіпотеза припускає відсутність систематичних розбіжностей (нульові розбіжності) між невідомим параметром генеральної сукупності і величиною, що одержана внаслідок обробки вибірки, то її називають *нульовою гіпотезою* і позначають H_0.

Зміст нульової гіпотези записується так:

$$H_0:\ \bar{x}_Г = a;$$
$$H_0:\ \sigma_Г = 2;$$
$$H_0:\ r_{xy} = 0{,}95.$$

Кожній нульовій гіпотезі можна протиставити кілька альтернативних (конкуруючих) гіпотез, які позначають символом H_α, що заперечують твердження нульової. Так, наприклад, нульова гіпотеза стверджує: $H_0 : \bar{x}_Г = a$, а альтернативна гіпотеза — $H_\alpha : \bar{x}_Г > a$, тобто заперечує твердження нульової.

Проста гіпотеза, як правило, належить до параметра ознак генеральної сукупності і є однозначною.

Наприклад, згідно з простою гіпотезою параметр генеральної сукупності дорівнює конкретному числу, а саме:

$$H_0 : \bar{x}_Г = 4;$$

$$H_0 : \sigma_\Gamma = 4.$$

Складна статистична гіпотеза є неоднозначною. Вона може стверджувати, що значення параметра генеральної сукупності належить певній області ймовірних значень, яка може бути дискретною і неперервною.

Наприклад:

$$H_0 : \bar{x}_\Gamma \in [2;\, 2{,}1;\; 2{,}2] \quad \text{або} \quad H_0 : \bar{x}_\Gamma \in [5{,}2\; \div\; 6{,}5].$$

Нульова гіпотеза може стверджувати як про значення одного параметра генеральної сукупності, так і про значення кількох параметрів, а також про закон розподілу ознаки генеральної сукупності.

2. Статистичний критерій. Емпіричне значення критерію

Для перевірки правильності висунутої статистичної гіпотези вибирають таксваний статистичний критерій, керуючись яким відхиляють або не відхиляють нульову гіпотезу. Статистичний критерій, котрий умовно позначають через *K*, є випадковою величиною, закон розподілу ймовірностей якої нам заздалегідь відомий. Так, наприклад, для перевірки правильності $H_0 : \bar{X}_\Gamma = a$ як статистичний критерій *K* можна взяти випадкову величину, яку позначають через *K* = *Z*, що дорівнює

$$Z = \frac{\bar{x}_\Gamma - a}{\sigma(\bar{x}_\Gamma)} \tag{29.1}$$

і яка має нормований нормальний закон розподілу ймовірностей. При великих обсягах вибірки ($n > 30$) закони розподілу статистичних критеріїв наближатимуться до нормального.

Спостережуване значення критерію, який позначають через K^*, обчислюють за результатом вибірки.

3. Область прийняття гіпотези. Критична область

Множину Ω всіх можливих значень статистичного критерію *K* можна поділити на дві підмножини *A* і $\bar{A}$, які не перетинаються.

$$(A \cup \bar{A} = \Omega,\;\; A \cap \bar{A} = \varnothing).$$

Сукупність значень статистичного критерію $K \in A$, за яких нульова гіпотеза не відхиляється, називають *областю прийняття нульової гіпотези*.

Сукупність значень статистичного критерію $K \in \bar{A}$, за яких нульова гіпотеза не приймається, називають *критичною областю*.

Отже, *A* — область прийняття H_0,

$\bar{A}$ — критична область, де H_0 відхиляється.

Точку або кілька точок, що поділяють множину Ω на підмножини *A* і $\bar{A}$, називають *критичними* і позначають через $K_{кр}$.

Існують три види критичних областей:

Якщо при $K < K_{кр}$ нульова гіпотеза відхиляється, то в цьому разі ми маємо лівобічну критичну область, яку умовно можна зобразити (рис. 24).

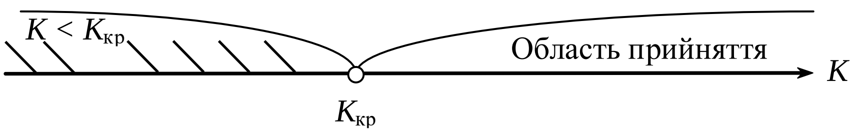

Рис. 24

Якщо при $K > K_{\text{кр}}$ нульова гіпотеза відхиляється, то в цьому разі маємо правобічну критичну область (рис. 25).

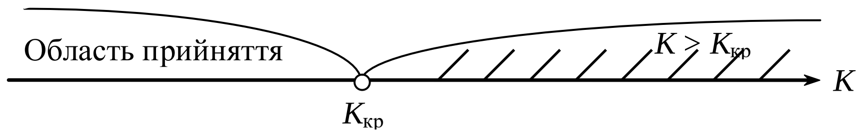

Рис. 25

Якщо ж при $K < K'_{\text{кр}}$ і при $K > K''_{\text{кр}}$ нульова гіпотеза відхиляється, то маємо двобічну критичну область (рис. 26).

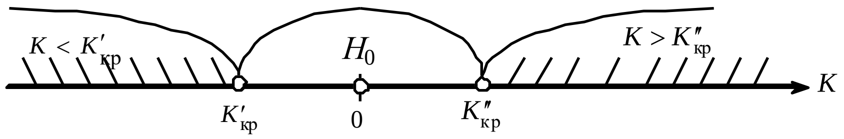

Рис. 26

Лівобічна і правобічна області визначаються однією критичною точкою, двобічна критична область — двома критичними точками, симетричними відносно нуля.

4. Загальний алгоритм перевірки правильності нульової гіпотези

Для перевірки правильності H_0 задається так званий *рівень значущості* α.

α — це мала ймовірність, якою наперед задаються. Вона може набувати значення α = 0,005; 0,01; 0,001.

В основу перевірки H_0 покладено принцип $P(K \in \overline{A}) = \alpha$, тобто ймовірність того, що статистичний критерій потрапляє в критичну область $\overline{A}$, дорівнює малій імовірності α. Якщо ж виявиться, що $K \in \overline{A}$, а ця подія малоймовірна і все ж відбулася, то немає підстав приймати нульову гіпотезу.

Пропонується такий алгоритм перевірки правильності H_0:

1. Сформулювати H_0 й одночасно альтернативну гіпотезу H_α.

2. Вибрати статистичний критерій, який відповідав би сформульованій нульовій гіпотезі.

3. Залежно від змісту нульової та альтернативної гіпотез будується правобічна, лівобічна або двобічна критична область, а саме:

нехай $H_0 : \overline{x}_r = a$, тоді, якщо

$H_\alpha : \overline{x}_r > a$, то вибирається правобічна критична область, якщо

$H_\alpha : \overline{x}_r < a$, то вибирається лівобічна критична область і коли

$H_\alpha : \overline{x}_r \neq a$, то вибирається двобічна критична область.

4. Для побудови критичної області (лівобічної, правобічної чи двобічної) необхідно знайти критичні точки. За вибраним статистичним критерієм та рівнем значущості α знаходяться критичні точки.

5. За результатами вибірки обчислюється спостережуване значення критерію $K^*_{сп}$.

6. Відхиляють чи приймають нульову гіпотезу на підставі таких міркувань:

у разі, коли $K^* \in \overline{A}$, а це є малоймовірною випадковою подією, $P(K^* \in \overline{A}) = \alpha$ і, незважаючи на це, вона відбулася, то в цьому разі H_0 відхиляється:

для лівобічної критичної області

$$P(K^*_{сп} < K_{кр}) = \alpha \qquad (29.2)$$

для правобічної критичної області

$$P(K^*_{сп} > K_{кр}) = \alpha \qquad (29.3)$$

для двобічної критичної області

$$P(K^*_{сп} < K'_{кр}) + P(K^*_{сп} > K''_{кр}) = \alpha \qquad (29.4)$$

або

$$P(K^*_{сп} < K'_{кр}) = P(K^*_{сп} > K''_{кр}) = \frac{\alpha}{2} \qquad (29.5)$$

ураховуючи ту обставину, що критичні точки $K'_{кр}$ і $K''_{кр}$ симетрично розташовані відносно нуля.

4. Помилки першого та другого роду. Потужність критерію

Якою б не була малою величина α, потрапляння спостережуваного значення $K^*_{сп}$ у критичну область $\left(K^*_{сп} \in \overline{A}\right)$ ніколи не буде подією абсолютно неможливою. Тому не виключається той випадок, коли H_0 буде правильною, а $K^*_{сп} \in \overline{A}$, а тому нульову гіпотезу буде відхилено.

Отже, при перевірці правильності H_0 можуть бути допущені помилки. Розрізняють при цьому помилки першого і другого роду.

Якщо H_0 є правильною, але її відхиляють на основі її перевірки, то буде допущена помилка першого роду.

Якщо H_0 є неправильною, але її приймають, то в цьому разі буде допущена помилка другого роду.

Імовірність помилки першого роду: α . Імовірність помилки другого роду позначають символом β. Різницю $\pi = 1 - \beta$ називають *імовірністю* обґрунтованого відхилення H_0, або *потужністю* критерію.