**Лекція 28. Інтервальні оцінки параметрів розподілу. Довірчі інтервали для дисперсії.**

У разі, коли ознака $X$ має нормальний закон розподілу, для побудови довірчого інтервалу із заданою надійністю γ для $D_г$, $\sigma_г$ застосовуємо випадкову величину

$$\chi^2 = \frac{n-1}{\sigma_Г^2} S^2, \tag{28.1}$$

що має розподіл $\chi^2$ із $k = n - 1$ ступенями свободи.

Оскільки випадкові події

$$A\left(\chi_1^2 < \chi^2 < \chi_2^2\right) \text{ і } B\left(\frac{1}{\chi_2^2} < \frac{1}{\chi^2} < \frac{1}{\chi_1^2}\right)$$

є рівноймовірними, тобто їх імовірності рівні $\left(P(A) = P(B)\right)$, маємо:

$$P\left(\chi_1^2 < \chi^2 < \chi_2^2\right) = P\left(\frac{1}{\chi_2^2} < \frac{1}{\chi^2} < \frac{1}{\chi_1^2}\right). \tag{28.2}$$

Отже, довірчий інтервал для $\sigma_Г^2 = D_Г$ матиме вигляд:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2} < D_Г < \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2} \tag{28.3}$$

Тоді довірчий інтервал для $\sigma_г$ випливає із (28.3) і буде таким:

$$\frac{S\sqrt{n-1}}{\chi_2} < \sigma_Г < \frac{S\sqrt{n-1}}{\chi_1} \tag{28.4}$$

Значення $\chi_1^2$, $\chi_2^2$ знаходимо за таблицею (додаток 4) згідно з рівностями:

$$P\left(\chi^2 > \chi_1^2\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}; \tag{28.5}$$

$$P\left(\chi^2 > \chi_2^2\right) = \frac{\alpha}{2}, \tag{28.6}$$

де $\alpha = 1 - \gamma$.

**Приклад.** Перевірена партія однотипних телевізорів $x_i$ на чутливість до відеопрограм $n_i$, дані перевірки наведено як дискретний статистичний розподіл:

| $n_i$, мкв | 200 | 250 | 300 | 350 | 400 | 450 | 500 | 550 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 2 | 5 | 6 | 7 | 5 | 2 | 2 | 1 |

З надійністю $\gamma = 0{,}99$ побудувати довірчі інтервали для $D_Г, \sigma_Г$.

***Розв'язання.*** Для побудови довірчих інтервалів необхідно знайти значення $S^2$, $S$.

Обчислимо значення $\bar{x}_В$:

$$\bar{x}_{\text{В}} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \left|\text{Так як } n = \sum n_i = 30\right| =$$

$$= \frac{200\cdot 2 + 250\cdot 5 + 300\cdot 6 + 350\cdot 7 + 400\cdot 5 + 450\cdot 2 + 500\cdot 2 + 550\cdot 1}{30} =$$

$$= \frac{400 + 1250 + 1800 + 2450 + 2000 + 900 + 1000 + 550}{30} = \frac{10350}{30} = 345 \text{ мкв.}$$

Обчислимо $D_{\text{В}}$:

$$\frac{\sum x_i^2 n_i}{n} = \frac{(200)^2\cdot 2 + (250)^2\cdot 5 + (300)^2\cdot 6 + (350)^2\cdot 7 +}{30}$$

$$\frac{+(400)^2\cdot 5 + (450)^2\cdot 2 + (500)^2\cdot 2 + (550)^2\cdot 1}{30} =$$

$$= \frac{80\,000 + 312\,500 + 540\,000 + 857\,500 + 800\,000 + 405\,000 +}{30}$$

$$\frac{+500\,000 + 302\,500}{30} = \frac{3797500}{30} = 126583{,}3.$$

$$D_{\text{В}} = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - \left(\bar{x}_{\text{В}}\right)^2 = 126583{,}3 - (345)^2 = 126583{,}3 - 119025 = 7558{,}3.$$

Отже, $D_{\text{В}} = 7558{,}3\,[\text{мкв}]^2$.

Виправлена дисперсія і виправлене середнє квадратичне відхилення дорівнюватимуть:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{В}} = \frac{30}{30-1}\cdot 7558{,}3 = \frac{30}{29}\cdot 7558{,}3 = 7818{,}9\,[\text{мкв}]^2;$$

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_{\text{В}}} = \sqrt{7818{,}9} \approx 88{,}42 \text{ мкв.}$$

Оскільки $\alpha = 1 - \gamma = 1 - 0{,}99 = 0{,}01$, то згідно з (28.5), (28.6) знаходимо значення $\chi_1^2$, $\chi_2^2$, а саме:

$$P\left(\chi^2 > \chi_1^2\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0{,}01}{2} = 1 - 0{,}005 = 0{,}995.$$

$$P\left(\chi^2 > \chi_2^2\right) = \frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}01}{2} = 0{,}005.$$

За таблицею (додаток 4) знаходимо:

$$\chi_1^2\left(0{,}995;\, k = m-1\right) = \chi_1^2\left(0{,}995;\, k = 29\right) = 14{,}3.$$

$$\chi_2^2\left(0{,}005;\, k = 29\right) = 52{,}5.$$

Обчислимо кінці довірчого інтервалу для $D_{\Gamma}$:

$$\frac{n-1}{\chi_2^2} S^2 = \frac{29}{52{,}5}\cdot 7818{,}9 = 4319{,}01;$$

$$\frac{n-1}{\chi_1^2}S^2 = \frac{29}{14{,}3} \cdot 7818{,}9 = 15856{,}5.$$

Отже, довірчий інтервал для $D_Г$ буде таким:

$$4319{,}0 < D_Г < 15856{,}5.$$

Довірчий інтервал для $\sigma_Г$ становить

$$68{,}3 < \sigma_Г < 130{,}83.$$