Лекція 27. Інтервальні оцінки параметрів розподілу. Довірчі інтервали для математичного сподівання при невідомій дисперсії.

Для малих вибірок, з якими стикаємося, досліджуючи різні ознаки в техніці чи сільському господарстві, для оцінювання $\overline{X}_{\Gamma} = a$ при невідомому значенні σ_{Γ} неможливо скористатися нормальним законом розподілу. Тому для побудови довірчого інтервалу застосовується випадкова величина

$$t = \frac{\overline{x}_{\text{В}} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}, \tag{27.1}$$

що має розподіл Стьюдента з $k = n - 1$ ступенями свободи.

Тоді (27.1) набирає такого вигляду:

$$P\left(\left|\frac{\overline{x}_{\text{В}} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right| < t_{\gamma}\right) = P\left(\overline{x}_{\text{В}} - \frac{t_{\gamma} \cdot S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_{\text{В}} + \frac{t_{\gamma} S}{\sqrt{n}}\right) = 2\int_{0}^{t_{\gamma}} f(t) = \gamma,$$

оскільки $f(t)$ для розподілу Стьюдента є функцією парною.

Обчисливши за даним статистичним розподілом $\overline{x}_{\text{В}}$, S і визначивши за таблицею розподілу Стьюдента значення t_{γ}, будуємо довірчий інтервал

$$\overline{x}_{\text{В}} - \frac{t_{\gamma} \cdot S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_{\text{В}} + \frac{t_{\gamma} S}{\sqrt{n}}. \tag{27.2}$$

Тут $t_{\gamma}(\gamma, k = n - 1)$ обчислюємо за заданою надійністю γ і числом ступенів свободи $k = n - 1$ за таблицею (додаток 3).

Приклад. Випадково вибрана партія з двадцяти приладів була випробувана щодо терміну безвідказної роботи кожного з них t_i. Результати випробувань наведено у вигляді дискретного статистичного розподілу:

t_i	100	170	240	310	380
n_i	2	5	10	2	1

З надійністю $\gamma = 0{,}99$ побудувати довірчий інтервал для «*a*» (середнього часу безвідказної роботи приладу).

Розв'язання. Для побудови довірчого інтервалу необхідно знайти середнє вибіркове і виправлене середнє квадратичне відхилення.

Обчислимо $\overline{x}_{\text{В}}$:

$$\overline{x}_{\text{В}} = \frac{\sum t_i n_i}{n} = \frac{100 \cdot 2 + 170 \cdot 5 + 240 \cdot 10 + 310 \cdot 2 + 380 \cdot 1}{20} = \frac{4450}{20} = 222{,}5.$$

Отже, дістали $\overline{x}_{\text{В}} = 222{,}5$ год.

Визначимо $D_{\text{В}}$:

$$\frac{\sum t_i^2 n_i}{n} = \frac{100^2 \cdot 2 + 170^2 \cdot 5 + 240^2 \cdot 10 + 310^2 \cdot 2 + 380^2 \cdot 1}{20} = \frac{1\,077\,100}{20} = 53\,855.$$

$$D_{\text{В}} = \frac{\sum t_i^2 n_i}{n} - \left(\overline{x}_{\text{В}}\right)^2 = 53\,855 - \left(222,5\right)^2 = 53\,855 - 49\,506,25 = 4348,75.$$

Отже, $D_{\text{В}}$ = 4348,75.

Виправлене середнє квадратичне відхилення дорівнюватиме:

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1}D_{\text{В}}} = \sqrt{\frac{20}{20-1}\cdot 4348,75} \approx 67,66\,\text{год.}$$

За таблицею значень $\int\limits_0^t f\left(x\right)dt = \gamma = 0,99$ (додаток 3) розподілу Стьюдента за заданою надійністю $\gamma = 0,99$ і числом ступенів свободи $k = n - 1$ = 20 – 1 = 19 знаходимо значення $t\left(\gamma = 0,99,\, k = 19\right) = 2,861.$

Обчислимо кінці довірчого інтервалу:

$$\overline{x}_{\text{В}} - \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}} = 222,5 - \frac{2,861\cdot 67,66}{\sqrt{20}} = 222,5 - \frac{2,861\cdot 67,66}{4,472} = 179,2\,\text{год.}$$

$$\overline{x}_{\text{В}} + \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}} = 222,5 + \frac{2,861\cdot 67,89}{\sqrt{20}} = 222,5 + \frac{2,861\cdot 67,66}{4,472} = 265,8\,\text{год.}$$

Отже, з надійністю $\gamma = 0,99$ можна стверджувати, що $\overline{X}_{\Gamma} = a$ буде міститися в інтервалі

$$179,2 < a < 265,8\,.$$

При великих обсягах вибірки, а саме: $n > 30$, на підставі центральної граничної теореми теорії ймовірностей (теореми Ляпунова) розподіл Стьюдента наближається до нормального закону. У цьому разі t_γ знаходиться за таблицею значень функції Лапласа.