Лекція 26. Інтервальні оцінки параметрів розподілу. Довірчі інтервали для математичного сподівання при відомій дисперсії.

План

1. Довірчі інтервали

2. Довірчі інтервали для математичного сподівання при відомій дисперсії

1. Довірчі інтервали

Точкові статистичні оцінки θ^* є випадковими величинами, а тому наближена заміна θ на θ^* часто призводить до істотних похибок, особливо коли обсяг вибірки малий. У цьому разі застосовують інтервальні статистичні оцінки.

Статистична оцінка, що визначається двома числами, кінцями інтервалів, називається *інтервальною*.

Різниця між статистичною оцінкою θ^* та її оцінювальним параметром θ, взята за абсолютним значенням, називається *точністю оцінки*, а саме:

$$\left|\theta^* - \theta\right| < \delta, \qquad (26.1)$$

де δ є точністю оцінки.

Оскільки θ^* є випадковою величиною, то і δ буде випадковою, тому нерівність (26.1) справджуватиметься з певною ймовірністю.

Імовірність, з якою береться нерівність (26.1), тобто

$$P\left(\left|\theta^* - \theta\right| < \delta\right) = \gamma \qquad (26.2)$$

називають *надійністю*.

Рівність (26.2) можна записати так:

$$P\left(\theta^* - \delta < \theta < \theta^2 + \delta\right) = \gamma \qquad (26.3)$$

Інтервал $\left[\theta^* - \delta;\ \theta^* + \delta\right]$, що покриває оцінюваний параметр θ генеральної сукупності з заданою надійністю γ, називають *довірчим*.

2. Довірчі інтервали для математичного сподівання при відомій дисперсії

Нехай ознака *X* генеральної сукупності має нормальний закон розподілу. Побудуємо довірчий інтервал для $\overline{X}_Г$, знаючи числове значення середнього квадратичного відхилення генеральної сукупності $\sigma_Г$, із заданою надійністю γ. Оскільки $\overline{x}_В$ як точкова незміщена статистична оцінка для $\overline{X}_Г = M\left(x\right)$ має нормальний закон розподілу з числовими характеристиками $M\left(\overline{x}_В\right) = \overline{X}_Г = a$, $\sigma\left(\overline{x}_В\right) = \frac{\sigma_Г}{\sqrt{n}}$, то, скориставшись (26.3), дістанемо

$$P\left(\left|\overline{x}_В - a\right| < \delta\right) = \gamma \qquad (26.4)$$

Випадкова величина $\overline{x}_В - a$ має нормальний закон розподілу з числовими характеристиками

$$M\left(\overline{x}_В - a\right) = M\left(\overline{x}_В\right) - a = a - a = 0;$$

$$D\left(\bar{x}_{\text{В}}-a\right)=D\left(\bar{x}_{\text{В}}\right)=\frac{D_{\Gamma}}{n};$$

$$\sigma\left(\bar{x}_{\text{В}}\right)=\frac{\sigma_{\Gamma}}{\sqrt{n}}.$$

Тому $\dfrac{\bar{x}_{\text{В}}-a}{\frac{\sigma_{\Gamma}}{\sqrt{n}}}$ матиме нормований нормальний закон розподілу $N(0;\,1)$.

Звідси рівність (26.4) можна записати, назначивши $\dfrac{\delta}{\frac{\sigma_{\Gamma}}{\sqrt{n}}}=x,$ так:

$$P\left(\left|\frac{\bar{x}_{\text{В}}-a}{\frac{\sigma_{\Gamma}}{\sqrt{n}}}\right|<x\right)=\gamma \tag{26.5}$$

або

$$P\left(\bar{x}_{\text{В}}-\frac{x\cdot\sigma_{\Gamma}}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}_{\text{В}}+\frac{x\cdot\sigma_{\Gamma}}{\sqrt{n}}\right)=\gamma.$$

Згідно з формулою нормованого нормального закону

$P\left(\left|X-a\right|<\delta\right)=2\Phi\left(\delta\right)$

для (26.5) вона набирає такого вигляду:

$$P\left(\left|\frac{\bar{x}_{\text{В}}-a}{\frac{\sigma_{\Gamma}}{\sqrt{n}}}\right|<x\right)=2\Phi\left(x\right)=\gamma. \tag{26.6}$$

З рівності (26.6) знаходимо аргументи x, а саме:

$2\Phi\left(x\right)=\gamma\rightarrow\Phi\left(x\right)=0{,}5\gamma.$

Аргумент x знаходимо за значенням функції Лапласа, яка дорівнює 0,5 γ за таблицею (додаток 2).

Отже, довірчий інтервал дорівнюватиме:

$$\bar{x}_{\text{В}}-\frac{x\cdot\sigma_{\Gamma}}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}_{\text{В}}+\frac{x\cdot\sigma_{\Gamma}}{\sqrt{n}} \tag{26.7}$$

що можна зобразити умовно на рис. 23.

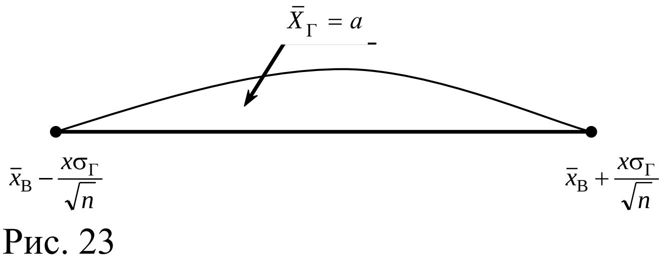

Рис. 23

Величина $\dfrac{x\cdot\sigma_{\Gamma}}{\sqrt{n}}$ називається *точністю оцінки*, або *похибкою вибірки*.

Приклад. Вимірявши 40 випадково відібраних після виготовлення деталей, знайшли вибіркову середню, що дорівнює 15 см. Із надійністю $\gamma = 0,99$ побудувати довірчий інтервал для середньої величини всієї партії деталей, якщо генеральна дисперсія дорівнює $0,09\,\text{см}^2$.

Розв'язання. Для побудови довірчого інтервалу необхідно знати: $\overline{x}_{\text{В}}$, $\sigma_{\text{Г}}$, *n*, *x*.

З умови задачі маємо: $\overline{x}_{\text{В}} = 15\,\text{см}$, $\sigma_{\text{Г}} = \sqrt{D_{\text{Г}}} = \sqrt{0,09\,\text{см}^2} = 0,3\,\text{см}$, $n = 40 \quad \to \quad \sqrt{n} = \sqrt{40} = 6,32.$ Величина *x* обчислюється з рівняння

$\Phi(x) = 0,5\gamma = 0,5 \cdot 0,99 = 0,495.$

$\Phi(x) = 0,495 \to x = 2,58\,[\text{за таблицею значень функції Лапласа}].$

Знайдемо числові значення кінців довірчого інтервалу:

$$\overline{x}_{\text{В}} - \frac{\sigma_{\text{Г}} \cdot x}{\sqrt{n}} = 15 - \frac{0,3 \cdot 2,58}{6,32} = 15 - 0,12 = 14,88\,\text{см}.$$

$$\overline{x}_{\text{В}} + \frac{\sigma_{Г} \cdot x}{\sqrt{n}} = 15 + \frac{0,3 \cdot 2,58}{6,32} = 15 + 0,12 = 15,12\,\text{см}.$$

Таким чином, маємо:

$14,88 < \overline{X}_{\text{Г}} < 15,12.$

Отже, з надійністю 0,99 (99% гарантії) оцінюваний параметр $\overline{X}_{\text{Г}}$ перебуває усередині інтервалу [14,87; 15,13].