Лекція 12. Числові характеристики основних розподілів

План

1. Закони розподілу дискретної випадкової величини

2. Закони розподілу неперервної випадкової величини

1. Закони розподілу дискретної випадкової величини

До найбільш поширених законів розподілу ДВВ належать: біномний; Пуассона; геометричний .

Біномний закон розподілу ДВВ задається таблицею, в якій ймовірності p_k розраховуються за формулою Бернуллі:

X	0	1	2	...	n-1	n
p	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2q^{n-2}$	...	$C_n^{n-1} p^{n-1}q$	p^n

Сталі параметри n та p називають параметрами розподілу.

Числові характеристики ДВВ X при біномному розподілі:

$$M(X)=np \tag{12.1}$$

$$D(X)=npq \tag{12.2}$$

$$\sigma = \sqrt{npq} \tag{12.3}$$

Якщо в схемі повторних незалежних випробувань $n\to\infty$, а число p близьке до 0, і крім того $np\to\lambda$ при $n\to\infty$, тоді ДВВ X, що визначає кількість появ певної події в схемі Бернуллі, має *розподіл Пуассона*, який задається натупною таблицею.

X	0	1	2	...	n-1	n
P	$l^{-\lambda}$	$\lambda\ell^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}\ell^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\ell^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^n}{n!}\ell^{-\lambda}$

Числові характеристики ДВВ X, що має розподіл Пуассона:

$$M(X)=\lambda \tag{12.4}$$

$$D(X)=\lambda \tag{12.5}$$

Геометричний розподіл задається формулою

$$P(X=m)=pq^{m-1}, \tag{12.6}$$

де p = P(A) – ймовірність появи події A в кожному з незалежних випробувань; q = 1–p; ДВВ X – це кількість випробувань у схемі Бернуллі до першої появи події A.

Числові характеристики ДВВ X, що має геометричний закон розподілу:

$$M(X)=\frac{1}{p} \tag{12.7}$$

$$D(X)=\frac{q}{p^2} \tag{12.8}$$

Приклад 1. Певний пристрій складається з 4-х комплектуючих. Пристрій протестовано на надійність його компонентів. У таблиці записано розподіл

ДВВ X – кількості компонентів, що припинили свою роботу за 200 перших годин роботи. Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

X	0	1	2	3	4
p	0,08	0,2	0,4	0,25	0,07

Розв'язання. Математичне сподівання обчислюємо за формулою (11.2), в даному випадку:

$$M(X)=\sum_{k=1}^{5}x_k p_k=0\cdot 0,08+1\cdot 0,2+2\cdot 0,4+3\cdot 0,25+4\cdot 0,07=2,3.$$

Дисперсію $D(X)$ обчислюємо за 4 властивістю дисперсії: $D(X) = M(X^2)-(M(X))^2$.

Обчислимо $M(X^2)=\sum_{k=1}^{n}x_k^2 p_k$; $M(X^2)=0\cdot 0{,}08+1\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}4+9\cdot 0{,}25+16\cdot 0{,}07=4{,}27$.

Маємо дисперсію $D(X)=4,\ 27-(2{,}03)^2=0{,}1491$. Відповідно середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)=\sqrt{0{,}1491}=0{,}386$.

Приклад 2. Випадкові величини X та $У$ незалежні і розподілені таким чином

X	2	7	9	Y	4	6
p	0,1	0,4	0,5	p	0,7	0,3

Знайти $M(Z)$, якщо $Z= 2XY+X^2+3Y-71$.

Розв'язання. Скориставшись властивостями математичного сподівання, маємо:

$M(Z)=M(2XY+X^2+3Y-71)=M(2XY)+M(X^2)+M(3Y)+M(-71) =$
$=2M(XY)+M(X^2)+3M(Y)-71=2M(X)M(Y)+M(X^2)+3\,M(Y)-71.$

Для розрахунку $M(Z)$ необхідно знайти $M(X)$, $M(Y)$, $M(X^2)$.

Згідно з формулою (12.1): $M(X)=2\cdot 0{,}1+7\cdot 0{,}4+9\cdot 0{,}5=7{,}5$;

$M(X^2)=4\cdot 0{,}1+49\cdot 0{,}4+81\cdot 0{,}5=60{,}5$;

$M(Y)=4\cdot 0{,}1+6\cdot 0{,}3=4{,}6$.

Маємо $M(Z)=2\cdot 7{,}5\cdot 4{,}6+60{,}5+3\cdot 4{,}6-71=72{,}3$.

Приклад 3. Випадкові величини X та Y незалежні і відомо, що $D(X)=2$; $D(Y)=3$. Знайти $D(Z)$ та $\sigma(Z)$, якщо $Z=3X-Y$.

Розв'язання. Скористаємось властивостями дисперсії

$D(Z)=D(3X-Y)=D(3X)+D(Y)=3^2D(X)+D(Y)=9D(X)+D(Y)=9\cdot 2+3=21.$

$\sigma(Z)=\sqrt{21}$.

Приклад 4. Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, якщо ДВВ X – кількість виграшних лотерейних квитків, якщо куплено 40 квитків і ймовірність виграшу будь-якого з них – 0,02.

Розв'язання. ДВВ X має біномний розподіл з параметрами $n=40$; $p=0{,}02$. Згідно формул (6) – (8) маємо $M(X)=np=40\cdot 0{,}02=0{,}8$;

$D(X)=npq=40\cdot 0{,}02\cdot 0{,}98 = 0{,}784$; $\sigma(X)=\sqrt{npq}=\sqrt{0{,}784}\approx 0{,}885$.

2. Закони розподілу неперервної випадкової величини

Основними законами розподілу НВВ є рівномірний, показниковий, нормальний та розподіл Стьюдента.

Випадкова величина X *розподілена рівномірно у проміжку* $[a;b]$, якщо її щільність ймовірності має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} c=\dfrac{1}{b-a}, & при \quad x\in[a;b] \\ 0, & при \quad x\notin[a;b] \end{cases} \tag{12.9}$$

Числові характеристики НВВ X, що рівномірно розподілена:

$$M(X)=\frac{a+b}{2};\ D(X)=\frac{(b-a)^2}{12} \tag{12.10}$$

Ймовірність того, що рівномірно розподілена ВВ X потрапить в проміжок $[x_1;x_2]$ за умови $a\le x_1<x_2\le b$ вираховується за формулою:

$$P(x_1<X<x_2)=\frac{x_1-x_2}{b-a} \tag{12.11}$$

Випадкова величина X розподілена за *показниковим законом з параметром* λ**,** якщо щільність її ймовірності має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & при \quad x\ge 0; \\ 0, & при \quad x<0. \end{cases} \tag{12.12}$$

Числові характеристики НВВ X, що має показниковий розподіл, визначаються:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda};\ D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

Інтегральна функція розподілу для ВВ X, що має показниковий розподіл, задається формулою:

$$F(x)=\begin{cases} 1-\lambda^{-\lambda x}, & при \quad x\ge 0; \\ 0, & при \quad x<0. \end{cases} \tag{12.13}$$

Ймовірність того, що розподілена за показниковим законом ВВ X потрапить в інтервал $(a;b)$ за умови $0<a<b$ обчислюється за формулою:

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a)=\lambda^{-a\lambda}-\lambda^{-b\lambda} \tag{12.14}$$

НВВ X розподілена *за нормальним законом*, якщо щільність її ймовірності має вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \tag{12.15}$$

де a та σ – параметри розподілу.

Графік цієї функції називається нормальною кривою або *кривою Гаусса*.

Інтегральна функція нормального розподілу має вигляд:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt \tag{12.16}$$

або

$$F(x)=0,5+\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{x-a}{\sigma}}e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau=0,5+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) \tag{12.17}$$

При a=0; σ=1 нормальна крива називається нормованою та НВВ X має нормований нормальний розподіл.
Числові характеристики НВВ X, що розподілена за нормальним законом:

$$M(X)= a;\ D(X) =\sigma^2. \qquad (12.18)$$

Ймовірність того, що нормально розподілена величина потрапить в проміжок ($c;d$):

$$P(c < X < d) = \Phi\left(\frac{d-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c-a}{\sigma}\right) \qquad (12.19)$$

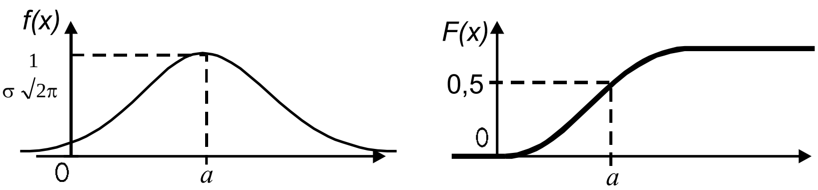
де Φ(x) – функція Лапласа, що задається формулою

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \qquad (12.20)$$

Для обчислення ймовірності відхилення нормально розподіленої ВВ від свого математичного сподівання а на наперед задану величину δ використовують формулу:

$$m(|X-a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \qquad (12.21)$$

Графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$, що задані формулами (12.14), (12.15) мають вигляд:



Приклад 5. Знайти числові характеристики ВВ X, що задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad x \le 0; \\ \dfrac{x^3}{8}, & \textit{якщо} \quad 0 < x \le 2; \\ 1, & \textit{якщо} \quad x > 2 \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо щільність ймовірності за формулою $f(x) = F(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{8}, & x \in (0;2]; \\ 0, & x \notin (0;2]. \end{cases}$$

Знайдемо математичне сподівання:

$$M(X) = \int_0^2 x \frac{3x^2}{8} dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^2 = \frac{3}{2}.$$

Знайдемо дисперсію:

$$D(X) = \int_0^2 x^2 \frac{3x^2}{8} dx - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{40} x^5\Bigg|_0^2 - \frac{9}{4} = \frac{12}{5} - \frac{9}{4} = \frac{3}{20}.$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{3}{20}}.$$