Лекція 13. Багатовимірні випадкові величини. Система двох випадкових величин

План

1. Основні поняття

2.Функція розподілу ймовірностей системи двох випадкових величин

3. Щільність ймовірностей

1. Основні поняття

На одному й тому самому просторі елементарних подій Ω можна визначити не одну, а кілька випадкових величин. Така потреба постає, наприклад, коли досліджуваний об'єкт характеризується кількома випадковими параметрами. Так, у разі виготовлення валів такі їх параметри, як діаметр, довжина, овальність є випадковими величинами, значення яких наперед не можна передбачити. Або, скажімо, структура витрат випадково взятої окремої сім'ї на їжу, одяг, взуття, транспорт, задоволення духовних потреб також є випадковими величинами, визначеними на одному й тому самому просторі елементарних подій.

На багатовимірні випадкові величини поширюються майже без змін основні означення, які були розглянуті для одновимірної випадкової величини.

Одночасна поява внаслідок проведення експерименту n випадкових величин (X_1, X_2, ..., X_n) з певною ймовірністю являє собою n-вимірну випадкову величину, яку називають також *системою* n *випадкових величин*, або n*-вимірним випадковим вектором*.

Законом розподілу двох дискретних випадкових величин називають перелік можливих значень $Y = y_i$, $X = x_j$ та відповідних їм імовірностей спільної появи.

У табличній формі цей закон має такий вигляд:

$X = x_j$ / $Y = y_i$	x_1	x_2	x_3	…	x_m	p_{yi}
y_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}		p_{1m}	p_{y1}
y_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}		p_{2m}	p_{y2}
y_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}		p_{3m}	p_{y3}
…	…	…	…	…	…	…
y_k	p_{k1}	p_{k2}	p_{k3}	…	p_{km}	p_{ym}
p_{xj}	p_{x1}	p_{x2}	p_{x3}	…	p_{xm}	

Тут використано такі позначення

$$p_{ij} = p((Y = y_i) \bigcap (X = x_j)); \; p_{y_i} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}; \; p_{x_j} = \sum_{i=1}^{k} p_{ij}.$$

Умова нормування має вигляд:

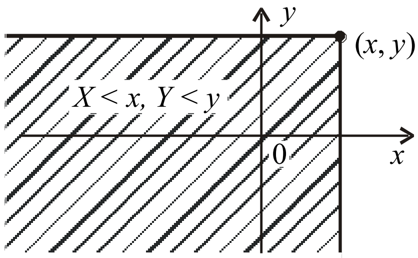
$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = \sum_{i=1}^{k} p_{y_i} = \sum_{j=1}^{m} p_{x_j} = 1. \tag{13.1}$$

2.Функція розподілу ймовірностей системи двох випадкових величин

Функцією розподілу ймовірностей системи двох випадкових величин (X, Y) називають таку функцію двох аргументів x, y, яка визначає ймовірність спільної появи подій $(X < x) \bigcap (Y < y)$:

$$F(x,y) = P((X < x) \bigcap (Y < y)). \tag{13.2}$$

Геометрично ця функція зображена на рис.:



Властивості $F(x, y)$

1. $0 \le F(x, y) \le 1$, оскільки $0 \le P((X < x) \bigcap (y < y)) \le 1$.
2. Якщо один із аргументів $F(x, y)$ прямує до $+\infty$, то функція розподілу системи прямує до функції розподілу одного аргументу, що не прямує до $+\infty$, а саме:

$$\lim_{y\to\infty} F(x, y) = F(x, \infty) = F(x); \tag{13.3}$$

$$\lim_{x\to\infty} F(x, y) = F(\infty, y) = F(y). \tag{13.4}$$

3. $\lim\limits_{\substack{y\to\infty,\\ x\to\infty}} F(x, y) = F(\infty, \infty) = P(x < \infty, y < \infty) = 1.$ (13.5)

4. $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} F(x, y) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x, y) = \lim\limits_{y\to-\infty} F(x, y) = 0.$ (13.6)

5. $F(x, y)$ є неспадною функцією аргументів x і y.

6. Імовірність влучення точки (X, Y) в довільний прямокутник ($a < X < b$, $c < Y < d$) обчислюємо так:

$$P(a < x < b, c < y < d) = F(b, d) + F(a, c) - F(a, d) - F(b, c). \tag{13.7}$$

3. Щільність ймовірностей

Характеристикою системи неперервних випадкових величин є щільність імовірностей.

Для визначення щільності ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин (X, Y) застосовується формула (13.7).

Функція $f(x, y)$ може існувати лише за умови, що $F(x, y)$ є неперервною за аргументами x і y та двічі диференційовною.

Функції $f(x, y)$ у тривимірному просторі відповідає певна поверхня — так звана *поверхня розподілу ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин* (X, Y).

Тоді $f(x, y)\, dxdy$ — імовірність розміщення системи двох випадкових величин у прямокутнику зі сторонами dx, dy.