Лекція 7. Поліноміальна формула. Граничні теореми в схемі Бернулі. Локальна теорема

План

1.Поліноміальна формула
2. Локальна теорема

1.Поліноміальна формула

Як відмічалося раніше, схема Бернуллі є послідовністю незалежних випробувань з двома можливими результатами. При цьому в кожному випробуванні подія A може з’явитись з однією і тією ж ймовірністю p, а подія $\overline{A}$ – з ймовірністю $q = 1 - p$.

За поліноміальною схемою здійснюється перехід від послідовності незалежних випробувань з двома можливими результатами (A та $\overline{A}$) до послідовності незалежних випробувань з k взаємновиключними результатами $A_1, A_2, ..., A_k$. При цьому в кожному випробуванні події $A_1, A_2, ..., A_k$ з’являються відповідно з ймовірностями $p_1, p_2, ..., p_k$. Тоді ймовірність $P_n(m_1, m_2, ..., m_k)$ того, що в n незалежних випробуваннях подія A_1 відбудеться m_1 разів, A_2 – m_2 раз і т.д., подія A_k – m_k разів $(m_1 + m_2 + ... + m_k = n)$, визначиться за формулою:

$$P_n(m_1, m_2, ..., m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot ... \cdot m_k!} \cdot p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot ... \cdot p_k^{m_k}. \tag{7.1}$$

2. Локальна теорема

Якщо ймовірність появи випадкової події в кожному з n незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює $p (0 < p < 1)$, то для великих значень n і m імовірність того, що випадкова подія A настане m раз, подається такою асимптотичною формулою:

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} \tag{7.2}$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ називається *функцією Гаусса*. Функція Гаусса протабульована, і її значення наведено в дод. 1, де

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \tag{7.3}$$

Тут x є рівномірно обмеженою величиною відносно n і m.

Властивості функції Гаусса:

1) $\varphi(x)$ визначена на всій осі абсцис; $\varphi(x) > 0$;
2) $\varphi(x)$ є функцією парною: $\varphi(-x) = \varphi(x)$;
3) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \varphi(x) = 0$;
4) $\varphi'(x) = -x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$; $\varphi'(0) = 0$;

$\varphi'(x)\big|_{x<0} > 0$; $\varphi'(x)\big|_{x>0} < 0$; отже, $\varphi(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ — максимум функції Гаусса;

5) $\varphi''(x) = (x^2 - 1)\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ $\varphi''(x)\big|_{x=\pm 1} = 0$.

Графік функції Гаусса зображено на рис. 4.

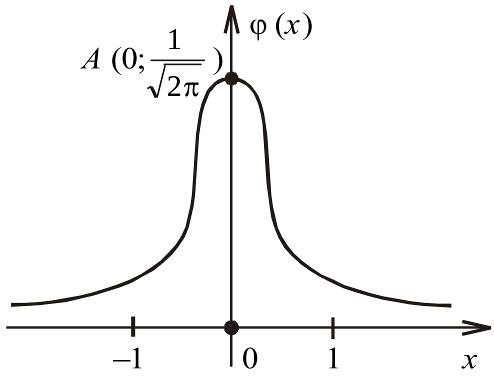

Рис. 4

Приклад 1. Фабрика випускає 75% виробів 1-го сорту. Із партії готових виробів навмання беруть 400 деталей. Обчислити ймовірності таких випадкових подій:

1) виробів 1-го сорту виявиться 290 шт.;
2) 300 шт.;
3) 320 шт.

Розв'язання. За умовою задачі маємо:
n = 400; p = 0,75; q = 0,25; m = 290; 300; 320.

1) $\sqrt{npq} = \sqrt{400 \cdot 0,75 \cdot 0,25} = \sqrt{75} \approx 8,7$; $np = 400 \cdot 0,75 = 300$;

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{290 - 300}{8,7} = -1,15;$$

$$P_{400}(290) \approx \frac{\varphi(-1,15)}{8,7} = \frac{\varphi(1,15)}{8,7} = \frac{0,2059}{8,7} \approx 0,0237;$$

2) $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{300 - 300}{8,7} = 0$;

$$P_{400}(300) \approx \frac{\varphi(0)}{8,7} = \frac{0,3989}{8,7} \approx 0,046;$$

3) $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{320 - 300}{8,7} = \dfrac{20}{8,7} \approx 2,3$;

$$P_{400}(320) \approx \frac{\varphi(2,3)}{8,7} \approx \frac{0,0283}{8,7} \approx 0,0033.$$