Лекція 5. Залежні та незалежні випадкові події. Умовна ймовірність. Формула повної ймовірності

План

1. Умовна ймовірність та її властивість
2. Формули множення ймовірностей
3. Формула повної ймовірності
4. Формула Байєса

1. Умовна ймовірність та її властивість

Випадкові події A і B називають *залежними*, якщо поява однієї з них (A або B) впливає на ймовірність появи іншої.

У протилежному випадку випадкові події A і B називаються *незалежними*.

Якщо ймовірність випадкової події А обчислюється за умови, що подія В відбулася, то така ймовірність називається *умовною*. Ця ймовірність обчислюється за формулою

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}/\mathrm{B})=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\mathrm{P}(\mathrm{B})\neq 0 \qquad (5.1)$$

Аналогічно

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}/\mathrm{A})=\frac{P(A\cap B)}{P(A)},\mathrm{P}(\mathrm{A})\neq 0 \qquad (5.2)$$

1. $P(A / B) = 0$, якщо $A\cap B = \varnothing$.
2. $P(A / B) = 1$, якщо $A\cap B = B$.
3. У решті випадків $0 < P(A/B) < 1$.

Приклад 1. Задана множина цілих чисел. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Навмання беруть одне число. Яка ймовірність того, що це число виявиться кратним 3, коли відомо, що воно є непарним?

Розв'язання. Нехай подія A — поява числа кратного 3, B — кратного 2.
Тоді $A = (3, 6, 9, 12)$, $m_1 = 4$;
$B = (2, 4, 6, 8, 10, 12)$, $m_2 = 6$;
$A\cap B = (6, 12)$, $m_3 = 2$;

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{m_1}{n}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3};\ \mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{6}{12}=\frac{1}{2};\ \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{m_3}{n}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6};$$

$$P(A/B)=\mathrm{P}(\mathrm{A}/\mathrm{B})=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$

Оскільки $\mathrm{P}(\mathrm{A})\neq \mathrm{P}(A/B)$, то події A і B є залежними

2. Формули множення ймовірностей

Згідно із (5.1) і (5.2) маємо:

$$P(A\cap B) = P(B)\,P(A / B) = P(A)\,P(B / A). \qquad (5.3)$$

Формула множення для n залежних випадкових подій $A_1, A_2, \dots A_4$:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\, P(A_2 / A_1)\, P(A_3 / A_1A_2) \ldots P(A_n / A_1A_2 \ldots A_{n-1}) \qquad (5.4)$$

Приклад 2. У ящику міститься 15 однотипних деталей. Із них 9 стандартні, а решта — браковані. Деталі виймають по одній без повернення. Так було вийнято три деталі. Обчислити ймовірності таких випадкових подій:

1) A — три деталі виявляться стандартними;
2) B — усі три виявляться бракованими;
3) C — дві стандартні й одна бракована.

Розв'язання. Нехай A_i — поява стандартної, $\overline{A}_i$ — бракованої деталі при i-му вийманні.

Подія $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, $B = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$,

$$C = (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Оскільки випадкові події A_i, $\overline{A}_i$ є залежними, то:

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\, P(A_2 / A_1)\, P(A_3 / A_1A_2) = \frac{9}{15}\,\frac{8}{14}\,\frac{7}{13} = \frac{12}{65};$$

$$P(B) = P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) = P(\overline{A}_1)\, P(\overline{A}_2 / \overline{A}_1)\, P(\overline{A}_3 / \overline{A}_1\, \overline{A}_2) = \frac{6}{15}\,\frac{5}{14}\,\frac{4}{13} = \frac{6}{91}.$$

$$P(C) = P\Big((A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3)\Big) =$$

$$= P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) + P(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) + P(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$

$$= P(A_1)\, P(A_2 / A_1)\, P(\overline{A}_3 / A_1A_2) + P(A_1)\, P(\overline{A}_2 / A_1)\, P(A_3 / A_1\overline{A}_2) +$$

$$+ P(\overline{A}_1)\, P(A_2 / \overline{A}_1)\, P(A_3 / \overline{A}_1A_2) = \frac{9}{15}\,\frac{8}{14}\,\frac{6}{13} + \frac{9}{15}\,\frac{6}{14}\,\frac{8}{13} + \frac{6}{15}\,\frac{9}{14}\,\frac{8}{13} = \frac{216}{455}.$$

Якщо випадкові події A і B є незалежними, то $P(A / B) = P(A)$, $P(B / A) = P(B)$.

Формули (5.3), (5.4) наберуть такого вигляду:

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B); \quad P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Приклад 3. Гральний кубик і монету підкидають по одному разу. Яка ймовірність того, що при цьому на грані кубика випаде число, кратне 3, а на монеті герб?

Розв'язання. Нехай поява числа, кратного трьом — подія A, а поява герба — подія B. Випадкові події A і B є між собою незалежними. Отже,

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \qquad P(B) = \frac{1}{2}; \qquad P(A \cap B) = P(A)\, P(B) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

3. Формула повної ймовірності

У разі, коли випадкова подія A може відбутися лише за умови, що відбудеться одна з несумісних випадкових подій B_i, які утворюють повну групу і між собою є попарно несумісними

$\left(\mathrm{B}_i \bigcap \mathrm{B}_j = \varnothing,\ i \neq j,\ \ i, j = 1, \ldots, n, \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i = \Omega \right)$, імовірність події A обчислюється за формулою

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\right) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{P}\left(\mathrm{B}_i\right) \mathrm{P}\left(\mathrm{A} / \mathrm{B}_i\right) \tag{5.5}$$

яка називається *формулою повної ймовірності*.

Випадкові події B_1, B_2, ... B_n називають *гіпотезами*.

Приклад 4. До складального цеху надходять деталі від трьох інших цехів. Від першого надходить 45% усіх деталей, від другого — 35% і від третього — 20%. Перший цех допускає в середньому 6% браку, другий — 2% і третій — 8%.

Яка ймовірність того, що до складального цеху надійде стандартна деталь?

Розв'язання. Позначимо через A появу стандартної деталі, B_1 — деталь надійде від першого цеху, B_2 — від другого, B_3 — від третього. За умовою задачі:

$P(B_1) = 0{,}45, \quad P(A / B_1) = 0{,}94;$

$P(B_2) = 0{,}35, \quad P(A / B_2) = 0{,}98;$

$P(B_3) = 0{,}2, \quad P(A / B_3) = 0{,}92.$

Згідно з (5.5) маємо:

$P(A) = P(B_1)\, P(A / B_1) + P(B_2)\, P(A / B_2) + P(B_3)\, P(A / B_3) =$
$= 0{,}45 \cdot 0{,}94 + 0{,}35 \cdot 0{,}98 + 0{,}2 \cdot 0{,}92 = 0{,}423 + 0{,}343 + 0{,}184 = 0{,}95.$

4. Формула Байєса

Застосовуючи формулу множення ймовірностей для залежних випадкових подій A, B_i $(i = \overline{1, n})$, дістаємо $P(A)\, P(B_i / A) = P(B_i)\, P(A / B_i)$

$$P\left(B_i / A\right) = \frac{P(B_i) P(A / B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)\, P(A / B_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i)\, P(A / B_i)} \tag{5.6}$$

Залежність (5.6) називається *формулою Байєса*. Її використовують для переоцінювання ймовірностей гіпотез B_i за умови, що випадкова подія A здійсниться.

Після переоцінювання всіх гіпотез B_i маємо:

$$\sum_{i=1}^{n} P(B_i / A) = \sum_{i=1}^{m} \frac{P(B_i) P(A / B_i)}{P(A)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i) P(A / B_i)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$$

Згідно з формулою Байєса можна прийняти рішення, провівши експеримент. Але для цього необхідно, аби вибір тієї чи іншої гіпотези мав ґрунтовні підстави, тобто щоб унаслідок проведення експерименту ймовірність $P(B_i/A)$ була близька до одиниці.

Приклад 5. Маємо три групи ящиків. До першої групи належить 5 ящиків, у кожному з яких 7 стандартних і 3 браковані однотипні вироби, до другої групи — 9 ящиків, у кожному з яких 5 стандартних і 5 бракованих виробів, а до третьої — 3 ящики, у кожному з яких 3 стандартні й 7 бракованих виробів. Із довільно вибраного ящика три навмання взяті вироби виявилися стандартними. Яка ймовірність того, що вони були взяті з ящика, який належить третій групі?

Розв'язання. Позначимо B_1, B_2, B_3 гіпотези про те, що навмання вибраний ящик належить відповідно першій, другій або третій групі. Обчислимо ймовірності цих гіпотез. Оскільки всього за умовою задачі 17 ящиків, то

$$P\left(B_1\right)=\frac{5}{17};\ P\left(B_2\right)=\frac{9}{17};\ P(B_3)=\ P\left(B_3\right)=\frac{3}{17}.$$

Позначимо через A появу трьох стандартних виробів. Тоді відповідні умовні ймовірності:

$$P\left(A/B_1\right)=\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{21}{120};$$

$$P\left(A/B_2\right)=\frac{C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{10}{120};$$

$$P\left(A/B_3\right)=\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}.$$

За умовою задачі необхідно переоцінити ймовірність гіпотези B_3. Використовуючи формулу (5.6), маємо:

$$P\left(B_3/A\right)=\frac{P(B_3)\ P(A/B_3)}{P(B_1)\ P(A/B_1)+P(B_2)\ P(A/B_2)+P(B_3)\ P(A/B_3)}=$$

$$=\frac{\frac{3}{17}\ \frac{1}{120}}{\frac{5}{17}\ \frac{21}{120}+\frac{9}{17}\ \frac{10}{120}+\frac{3}{17}\ \frac{1}{120}}=\frac{3}{105+90+3}=\frac{3}{198}=\frac{1}{66}.$$