Лекція 2. Алгебра подій. Аксіоми теорії ймовірностей та їх наслідки

План

1. Алгебра подій.
2. Повна група подій. Протилежні події.
3. Аксіоми теорії ймовірностей та їх наслідки.

1. Алгебра подій.

✓**Додавання.** *Сумою двох подій A і B* називається така подія $C = A \cup B$ ($C = A + B$), яка внаслідок експерименту настає з настанням принаймні однієї з подій A або B. Подію $A \cup B$ схематично зображено на рис. 1 заштрихованою областю.

Операція $A \cup B$ називається *об'єднанням* цих подій.

✓**Множення.** *Добутком двох подій A і B* називається така подія $C = A \cap B$ ($C = AB$), яка внаслідок експерименту настає з одночасним настанням подій A і B.

Операція $A \cap B$ називається *перерізом* цих подій (рис. 2).

✓**Віднімання.** *Різницею двох подій A і B* називається така подія $C = A \setminus B$ ($C = A - B$), яка внаслідок експерименту настає з настанням події А і одночасним ненастанням події В (рис. 3).

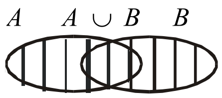

рис.1

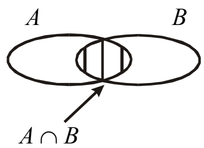

рис.2

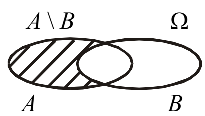

рис.3

Якщо $A \cap B \neq \varnothing$, то випадкові події A і B називають *сумісними*. Якщо $A \cap B = \varnothing$, то такі випадкові події A і B називають *несумісними*.

2. Повна група подій. Протилежні події

Якщо $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \ \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, то такі випадкові події утворюють *повну групу*, а саме: внаслідок експерименту якась із подій A_i обов'язково настане.

Дві несумісні випадкові події, що утворюють повну групу, називають *протилежними*.

Подія, яка протилежна A, позначається $\overline{A}$. Справедливі наступні співвідношення: $A \cup \overline{A} = \Omega$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Випадкові події A, B, C ($A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$, $C \subset \Omega$), для яких визначено операції додавання, множення та віднімання, підлягають таким законам:

1. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.
2. $A \cup B = B \cup A$. | Комутативний закон для операцій
3. $A \cap B = B \cap A$. | додавання та множення.
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. | Асоціативний закон для

5. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. — операцій додавання та множення.

6. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. — Перший дистрибутивний закон.

7. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$. — Другий дистрибутивний закон.

8. $A \cup \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}$.
9. $A \cap \boldsymbol{\Omega} = A$.
10. $A \cup \varnothing = A$.
11. $A \cap \varnothing = \varnothing$.
12. $\overline{A} = \boldsymbol{\Omega} \setminus A$.
13. $\overline{\boldsymbol{\Omega}} = \varnothing$.
14. $\overline{\varnothing} = \boldsymbol{\Omega}$.
15. $A \cup (A \cap \overline{B}) = A$; $B = B \cup (B \cap \overline{A})$.
16. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
17. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Елементарні випадкові події задовольняють такі твердження: 1) між собою несумісні; 2) утворюють повну групу; 3) є рівноможливими, а саме: усі елементарні події мають однакові можливості відбутися внаслідок проведення одного експерименту.

Для дискретного простору Ω перші два твердження можна записати так:

1) $\omega_i \cap \omega_j = \varnothing$, $i \neq j$; 2) $\bigcup_{i=1}^{n} \omega_i = \Omega$.

Для кількісного вимірювання появи випадкових подій і їх комбінацій уводиться поняття ймовірності події, що є числом такої ж природи, як і відстань у геометрії або маса в теоретичній механіці.

3. Аксіоми теорії ймовірностей та їх наслідки.

Нехай задано довільний простір елементарних подій — множину Ω і Θ — деяка система випадкових подій.

Система подій називається *алгеброю подій*, якщо:

1. $\Omega \in \Theta$.
2. Із того, що $A \in \Theta$, $B \in \Theta$, випливає: що $A \cap B \in \Theta$, $A \cup B \in \Theta$, $A \setminus B \in \Theta$.

Із тверджень 1 і 2 дістаємо, що $\varnothing = \Omega \setminus \Omega$, а отже, $\varnothing \subset \Theta$. Найменшою системою, яка буде алгеброю подій, є $\Theta = (\varnothing, \Omega)$. Якщо Ω — обмежена множина, то система Θ також буде обмеженою. Якщо множина містить *n* елементів, то кількість усіх підмножин буде 2^n.

Якщо **Ω** є неперервною множиною, то система Θ утворюється квадровними підмножинами множини **Ω**, які також утворюють алгебру подій.

Числова функція *P*, що визначена на системі подій Θ, називається ймовірностю, якщо:

1. Θ є алгеброю подій.
2. Для будь-якого $A \subset \Theta$ існує $P(A) \geq 0$.
3. $P(\Omega) = 1$.
4. Якщо *A* і *B* є несумісними ($A \cap B = \varnothing$), то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Для розв’язування задач з нескінченними послідовностями подій, наведені аксіоми необхідно доповнити аксіомою неперервності.

5. Для будь-якої спадної послідовності $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ подій із Θ, такої, що $\bigcap_{n=1} A_i = \varnothing$, випливає рівність $\lim P\left(\bigcap_{n=1} A_n\right) = 0$.

Трійка (Θ, Ω, *P*), де Θ є алгеброю подій і *P* задовольняє аксіоми 1-5, називається простором імовірностей.

Наслідки аксіом

1. Якщо випадкові події $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ є несумісними попарно, то

$$P\left(\bigcup_{i-1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

2. Якщо випадкові події $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ утворюють повну групу, то $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

3. Формула додавання для *n* сумісних випадкових подій має такий вигляд:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) +$$
$$+ P(A \cap B \cap C).$$

4. Якщо випадкова подія *A* сприяє появі $B(A \subset B)$, то $P(A) \le P(B)$.