Міністерство освіти і науки України

ТЕХНІЧНИЙ ФАХОВИЙ КОЛЕДЖ
Луцького національного технічного університету

Теорія ймовірностей та математична статистика

Методичні вказівки до практичних занять
для здобувачів фахової передвищої освіти
освітньо-професійної програми «Комп’ютерна інженерія»
галузь знань 12 Інформаційні технології
спеціальностей 123 Комп’ютерна інженерія,
126 Інформаційні системи та технології
денної форми навчання
та освітньо-професійної програми «Менеджмент»
галузь знань 07 Управління та адміністрування
спеціальності 073 Менеджмент
денної та заочної форм навчання

Луцьк 2021

УДК 519.2 (07)
Т 33

До друку
Голова навчально-методичної ради Луцького НТУ __________ О. М. Ляшенко

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій Луцького НТУ
Директор бібліотеки ________________ С. С. Бакуменко

Затверджено навчально-методичною радою Луцького НТУ,
протокол №___ від «___» ___________ 2021 року.

Рекомендовано до видання навчально-методичною радою ТФК Луцького НТУ,
протокол № ___ від «___» ____________ 2021 року.
Голова навчально-методичної ради ТФК ЛНТУ ___________ С. В. Буснюк

Розглянуто і схвалено на засіданні циклової комісії природничо-математичних дисциплін ТФК Луцького НТУ,
протокол № ___ від «___» ___________2021 року.

Голова ЦК ______________ Р. І. Аббасова

Укладач: ______________ Ю. В Боровська, викладач ТФК Луцького НТУ.

Рецензент: ______________ Ю. І. Харкевич, кандидат фізико-математичних наук, професор факультету інформаційних систем, фізики та математики ВНУ імені Лесі Українки.

Відповідальний за випуск: _____________ Р.І. Аббасова, голова ЦК природничо-математичних дисциплін ТФК Луцького НТУ.

Т 33 **Теорія ймовірностей та математична статистика** [Текст]: Методичні вказівки до практичних занять для здобувачів фахової передвищої освіти освітньо-професійної програми «Комп’ютерна інженерія» галузь знань 12 Інформаційні технології спеціальностей 123 Комп’ютерна інженерія, 126 Інформаційні системи та технології денної форми навчання та освітньо-професійної програми «Менеджмент» галузь знань 07 Управління та адміністрування спеціальності 073 Менеджмент денної та заочної форм навчання / уклад. Ю. В. Боровська. – Луцьк : ТФК Луцького НТУ, 2021. – 68 с.

Методичні вказівки до практичних занять для здобувачів фахової передвищої освіти спеціальностей 123 Комп’ютерна інженерія, 126 Інформаційні системи та технології, 073 Менеджмент складено відповідно до діючої програми з теорії ймовірностей та математичної статистики. Пропоноване видання можна використовувати на лекціях, при підготовці до практичних робіт, а також дозволяє студентам краще засвоїти основні поняття та методи розв’язання задач з теорії ймовірностей та математичної статистики при самостійній підготовці.

ЗМІСТ

ВСТУП

Навчальна дисципліна «Теорія ймовірностей та математична статистика» займає важливе місце у навчальному процесі, оскільки формує базові знання у сфері застосування ймовірнісно-статистичного апарату, вивчення закономірностей у масових випадкових явищах, визначення їх ймовірнісних характеристик з метою застосування до аналізу економічних явищ та прогнозування.

Теорія ймовірностей – це математична наука, що вивчає закономірності масових однорідних випадкових явищ.

Математична статистика — розділ математики, в якому за допомогою математичних методів систематизують, опрацьовують і застосовують статистичні дані для наукових і практичних висновків.

Теорія ймовірностей та математична статистика, які дедалі ширше застосовуються в багатьох галузях науки і техніки, є важливими складовими фундаментальної підготовки сучасних висококваліфікованих фахівців.

Метою даного видання є ознайомлення здобувачів фахової передвищої освіти з основними поняттями комбінаторики, основ теорії ймовірностей, теорії оцінювання невідомих параметрів, перевірки статистичних гіпотез, елементів кореляційно-регресійного аналізу, методами, теоремами та формулами теорії ймовірностей та математичної статистики.

Перелік розглянутих у методичному виданні тем обумовлений діючою програмою з теорії ймовірностей та математичної статистики. Кожна тема містить стисло викладені теорію та приклади розв'язання типових задач, що дозволяє на належному рівні володіти ймовірнісними методами дослідження явищ повсякденного життя. Методичні вказівки містять достатню кількість задач до кожної з тем, а також перелік задач для самостійного опрацювання в кінці кожного розділу.

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА
РОЗДІЛ 1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

Тема 1. Основні поняття теорії ймовірностей. Безпосередній підрахунок ймовірностей. Класичне та геометричне означення ймовірності.

Теоретичні відомості

Імовірністю випадкової події А називається невід'ємне число $P(A)$, що дорівнює відношенню числа елементарних подій m ($0 \le m \le \le n$), які сприяють появі A, до кількості всіх елементарних подій n простору Ω:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Для неможливої події $P(\varnothing) = 0$ ($m = 0$). Для вірогідної події $P(\Omega) = 1$ ($m = n$).

Отже, для довільної випадкової події $0 < P(A) < 1$.

Нехай на площині лежить область D площею S_D, всередині якої довільно розташована інша менша область d($d \in D$) площею S_d($S_d \le S_D$). Якщо попадання в меншу область навмання кинутої точки є подія A, то її ймовірність $P(A) = \frac{S_d}{S_D}$ – це є відношення площ вищезгадуваних областей.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Монету підкидають чотири рази. Побудувати простір елементарних подій для цього експерименту і такі випадкові події:

1) A — герб випаде двічі; 2) B — герб випаде не менш як тричі.

Розв'язання. Шуканий простір елементарних подій:

Ω = {гггг, гггц, ггцг, гцгг, цгггг, ггцц, гццг, гцгц, цгцг, ццгг, цггц, гццц, цгцц, ццгц, цццг, цццц};

1) A = {ггцц, ццгг, гцгц, цгцг, гццг, цггц};

2) B = {гггг, гггц, ггцг, гцгг, цггг).

Приклад 2. У ящику міститься 15 однотипних деталей, із яких 6 бракованих, а решта — стандартні. Навмання з ящика береться одна деталь. Яка ймовірність того, що вона буде стандартною?

Розв'язання. Число всіх рівноможливих елементарних подій для цього експерименту:

$$n = 15.$$

Нехай A — подія, що полягає в появі стандартної деталі. Число елементарних подій, що сприяють появі випадкової події A, дорівнює дев'яти ($m = 9$). Згідно з (1) маємо:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

Приклад 3. У цеху працює 10 верстатів-автоматів, кожний із яких може з певною ймовірністю перебувати в роботоздатному стані або в стані поломки.

Яка ймовірність того, що під час роботи верстатів-автоматів із ладу вийдуть три з них?

Розв'язання. Оскільки кожний верстат-автомат може перебувати у двох несумісних станах — роботоздатному або нероботоздатному, то кількість усіх елементарних подій множини Ω буде $n = 2^{10}$.

Позначимо через A випадкову подію — із ладу вийде три верстати з десяти. Тоді кількість елементарних подій, що сприяють появі A, буде

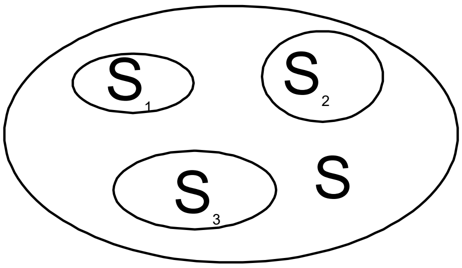
$$m = C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 7!} = 120.$$

Отже,

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\right) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^{3}}{2^{10}} = \frac{120}{2^{10}}.$$

Приклад 4. Знайти ймовірність того, що навмання взята з круга радіуса R точка належатиме квадрату, вписаному в коло, яке обмежує круг.

Якщо подія A бажана, то на підставі означення геометричної ймовірності записуємо $P(A) = \frac{(R\sqrt{2})^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi}$.



Приклад 5. Всередині плоскої фігури площі S лежать три плоских фігури відповідно з площинами S_1, S_2, S_3. Яка ймовірність того, що навмання вибрана з більшої фігури точка не попадає у жодну із фігур S_1, S_2 та S_3?

На підставі означення $P(A) = \frac{s_d}{s_D}$ маємо: $S_D=S$; $S_d=S-S_1-S_2-S_3$ і як наслідок $P(A) = 1 - \frac{S_1+S_2+S_3}{S}$, де подія A шукана.

Задачі

1.1. Партія з 10 деталей містить 4 браковані. Знайти ймовірність того, що з навмання взятих двох деталей будуть:

1) дві придатні;
2) дві браковані;
3) 1 придатна і 1 бракована.

1.2. У грошово-речовій святковій лотереї на серію в 10000 білетів припадає 140 грошових і 160 речових виграшів.

Знайдіть ймовірність отримати: грошовий виграш; речовий виграш; будь-який виграш; нічого не отримати.

1.3. Навмання взятий телефонний номер складається із 6 цифр. Знайти ймовірність того, що в ньому всі цифри різні.

1.4. На прямокутній полиці навмання розставлено 8 томів зібрання творів. Знайти ймовірність того, що в результаті I, II і III томи стоять поруч.

1.5. Набираючи номер телефону, абонент забув дві останні цифри і, вважаючи, що вони різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрано правильні цифри.
1.6. У лотереї на кожні 500 білетів розігрується 100 речових і 50 грошових виграшів. Знайти ймовірність виграшу для особи, яка має один білет.
1.7. За підсумком року акції десяти фірм мали прибуток, чотирьох фірм знецінились, а акції шести фірм — зберегли свою номінальну вартість. Яка ймовірність того, що випадково куплені шість акцій різних фірм матимуть прибуток?
1.8. Академічній групі, в якій 12 дівчат та 18 юнаків, запропоновано придбати 10 акцій банку «Надра». Знайти ймовірність того, що власниками акцій стануть 4 юнаки та 3 дівчини, якщо розігрування здійснюється випадковим чином.
1.9. Пасажир забув дві останні цифри коду комірки автоматичної камери схову, де він залишив речі. Знайти ймовірність того, що після першого набору коду із двома останніми навмання набраними цифрами комірка відчиниться, а також імовірність цієї ж події у випадку, коли пасажир пам’ятає, що ці цифри різні.
1.10. Серед 30 видів акцій будівельних організацій 19 стали прибутковими, 5 — збитковими, а 6 залишилися без змін. Яка ймовірність того, що серед п’яти навмання придбаних акцій різних видів прибутковими виявляться три?
1.11. Цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 написано на однакових картках, які ретельно перемішано. Тричі навмання беруть по одній картці і кладуть їх зліва направо. Знайти ймовірність того, що утворене тризначне число виявиться: а) парним; б) кратним трьом; в) кратним 5.
1.12. До ліфта дев’ятиповерхового будинку на 1-му поверсі зайшло троє пасажирів. Кожен із них з однаковою ймовірністю виходить на будь-якому з поверхів, починаючи з 2-го. Знайти ймовірність того, що всі пасажири:
1) вийдуть на 5-му поверсі;
2) вийдуть одночасно на одному з поверхів;
3) вийдуть на різних поверхах.

1.13. У конверті 10 акцій, серед яких три фірми А. Навмання відібрано 4 акції. Яка імовірність того, що серед них буде одна акція фірми А?
1.14. Усередині круга радіусом R навмання вибирають точку. Знайти ймовірність того, що точка потрапить усередину:
1) вписаного у круг квадрата;
2) вписаного у круг правильного трикутника.

1.15. У коло радіуса 10 кидають точку. Знайти ймовірність того, що відстань від точки до центра кола не перевищує 4.

Тема 2. Алгебра подій. Аксіоми теорії ймовірностей.

Теоретичні відомості

Додавання. *Сумою двох подій A і B* називається така подія $C = A \cup B$ ($C = A + B$), яка внаслідок експерименту настає з настанням принаймні однієї з подій A або B.

Множення. *Добутком двох подій A і B* називається така подія $C = A \cap B$ ($C = AB$), яка внаслідок експерименту настає з одночасним настанням подій A і B.

Віднімання. *Різницею двох подій A і B* називається така подія $C = A \setminus B$ ($C = A - B$), яка внаслідок експерименту настає з настанням події A і одночасним ненастанням події B.

Події A і $\overline{A}$ називаються *протилежними*, якщо вони несумісні й утворюють повну групу подій, тобто $A \cap \overline{A} = \varnothing$ і $A \cup \overline{A} = \Omega$.

Якщо $A \cap B \neq \varnothing$, то випадкові події A і B називають *сумісними*.

Якщо $A \cap B = \varnothing$, то такі випадкові події A і B називають *несумісними*.

Теорема додавання ймовірностей. Нехай подія A є сумою двох подій B і C. Тоді:

а) якщо події B і C несумісні, то $P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C)$;

б) якщо події B і C сумісні, то $P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$.

Теорема множення ймовірностей

Нехай подія A є добутком двох подій B і C. Тоді:

а) якщо події B і C незалежні, то $P(A) = P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$;

б) якщо події B і C залежні, то $P(A) = P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C/B)$.

Ця теорема справджується й для добутку n ($n > 2$) подій.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Задано множину цілих чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. Навмання з неї беруть одне число.

Побудувати випадкові події: 1) A — узяте число кратне 2; 2) B — кратне 3.

Визначити $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$.

Розв’язання. 1) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$; 2) $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$.

Звідси дістаємо:

$A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \cup \{3, 6, 9, 12, 15\} = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}$;

$A \cap B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \cap \{3, 6, 9, 12, 15\} = \{6, 12\}$;

$A \setminus B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \setminus \{3, 6, 9, 12, 15\} = \{2, 4, 8, 10, 14\}$.

Приклад 2. Партія містить 12 стандартних і чотири нестандартні деталі. Навмання беруть три деталі. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей:

1) не менш як дві стандартні;

2) усі три нестандартні;

3) принаймні одна стандартна.

Розв'язання. 1) Нехай подія A — «серед трьох узятих деталей не менш як дві стандартні». Тоді її можна подати як суму двох подій: A_1 — «серед трьох узятих деталей дві стандартні і одна нестандартна» і A_2 — «усі три узяті деталі стандартні». Події A_1 і A_2 несумісні, тому маємо:

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

Імовірності подій A_1 і A_2 знайдемо згідно з класичним означенням імовірності.

$$n = C_{16}^3 = 560; \;\; m_1 = C_{12}^2 \cdot C_4^1 = 66 \cdot 4 = 264; \;\; m_2 = C_{12}^3 = 220.$$

Отже, $P(A) = \dfrac{484}{560} \approx 0{,}864.$

2) Подія B — «усі три взяті деталі нестандартні». Цю подію можна подати як добуток трьох подій $B_i\,(i = 1,2,3)$, де i-та деталь нестандартна, $B = \bigcap\limits_{i=1}^{3} B_i$. Умовою задачі не задано, що деталі беруться з поверненням. Отже, взяти три деталі разом — це те саме, що брати їх по одній без повернення, а тому події залежні. Згідно з цим імовірність події B обчислюємо так:

$$P(B) = P\left(\bigcap_{i=1}^{3} B_i\right) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) \cdot P(B_3/B_1 \cap B_2) = \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} \approx 0{,}007.$$

3) Подія C — «із трьох деталей принаймні одна стандартна». Протилежна подія $\overline{C}$ — «усі три деталі нестандартні». Імовірність цієї події щойно знайдено: $P(\overline{C}) = P(B)$. Остаточно маємо: $P(C) = 1 - P(\overline{C}) \approx 1 - 0{,}007 = 0{,}993.$

Приклад 3. Студент підготував до іспиту 30 питань з 40. Яка ймовірність того, що студент відповість на три заданих йому питання?

Розв'язання. Позначимо випадкові події: A_1 – успішна відповідь на перше питання, A_2 – на друге, A_3 – на третє, U – успішна відповідь на три питання.

Відповідь на усі три питання означає сумісне здійснення подій A_1, A_2, A_3, тобто $U = A_1 \cap A_2 \cap A_3$. Але події A_1, A_2, A_3, є залежними, оскільки отримання питання, на яке студент знає відповідь, змінює ймовірність того, що і наступне питання буде таким, яке він знає. Отже, за формулою множення ймовірностей

$$P(U) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cap A_2).$$

Вважаючи вибір кожного питання рівноймовірним, за класичним означенням ймовірності знаходимо

$$P(A_1) = \frac{30}{40} \cdot$$

Після вибору першого питання, на яке студент знає відповідь, залишається всього 40 – 1 = 39 питань, а тих, на які студент знає відповідь, 30 – 1 = 29. Отже, ймовірність, що друге питання буде таким, яке студент знає, дорівнює

$$P(A_2 / A_1) = \frac{29}{39} \cdot$$

Коли вибрано два питання, які студент знає, залишається всього 40 – 2 = 38 питань, з яких таких, які студент знає, буде 30 – 2 = 28. Значить, ймовірність того, що третє питання буде таким, яке студент знає, дорівнює

$$P(A_3 / A_1 \cap A_2) = \frac{28}{38} \cdot$$

Таким чином, ймовірність того, що студент відповість на усі три питання, становить

$$P(U) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cap A_2). = \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39} \cdot \frac{28}{38} = \frac{609}{1482} \approx 0,41.$$

Приклад 4. У скрині знаходиться 10 однакових куль, пронумерованих від 1 до 10. Навмання виймають одну кулю. Випадкова подія *A* є „номер кулі парний”, випадкова подія *B* є „номер кулі більше шести”, подія *C* є „номер кулі кратний числу 3”.

1) Описати наступні події і знайти їх ймовірності за допомогою формул додавання і множення ймовірностей :

а) об’єднання подій *A* і *B* $(D = A \bigcup B)$;

б) переріз подій *A* та *B* $(E = A \bigcap B)$;

в) заперечення події *B* $(\boldsymbol{F} = \bar{\boldsymbol{B}})$.;

г) об’єднання інверсії події *C* та події *B* $(G = \bar{C} \cup B)$;

2) Записати в алгебраїчній формі наступні події і знайти їх ймовірності за допомогою формул додавання і множення ймовірностей:

а) *H*: номер кулі не більше 6 і не кратний трьом;

б) *I*: номер кулі парний або більше 6;

в) *J*: номер кулі непарний і не кратний трьом.

Розв’язання. Вибірковий простір випробування „витягання однієї кулі” є:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}, \qquad N_\Omega = 10.$$

Вибіркові простори подій *A, B, C*:

$$A = \{2,4,6,8,10\}, \qquad N_A = 5$$

$$B = \{7,8,9,10\}, \qquad N_B = 4$$

$$C = \{3,6,9\}, \qquad N_C = 3.$$

За класичним означенням ймовірності визначимо ймовірності подій *A, B, C:*

$$P(A) = \frac{N_A}{N_\Omega} = \frac{5}{10} = 0,5$$

$$P(B) = \frac{N_B}{N_\Omega} = \frac{4}{10} = 0,4$$

$$P(C)=\frac{N_C}{N_\Omega}=\frac{3}{10}=0{,}3.$$

1а) Подія D є об'єднанням подій A та B (D = A або B), причому події A та B є сумісними (вони можуть відбутися разом в одному випробуванні) і залежними. Ймовірність події D визначається за формулою додавання ймовірностей:

$$P(D)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$$

$$=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B|A)=0{,}5+0{,}4-0{,}5\cdot 0{,}4=0{,}7$$

Для перевірки отриманого результату побудуємо вибірковий простір події D:

$$D=\{2,4,6,7,8,9,10\}.$$

Як видно, $N_D=7$, так що

$$P(D)=\frac{N_D}{N_\Omega}=\frac{7}{10}=0{,}7.$$

1б) Подія E є перерізом подій A та B (E=A і B), причому події A та B є сумісними (вони можуть відбутися разом в одному випробуванні) і залежними. Ймовірність події E визначається за формулою множення ймовірностей:

$$P(E)=P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)=0{,}5\cdot 0{,}4=0{,}2$$

Для перевірки отриманого результату побудуємо вибірковий простір події E:

$$E=\{8,10\}.$$

Як видно, $N_E=2$, так що

$$P(D)=\frac{N_E}{N_\Omega}=\frac{2}{10}=0{,}2.$$

1в) Подія F є протилежною до події B і, таким чином,

$$P(F)=P(\bar{B})=1-P(B)=1-0{,}4=0{,}6.$$

Для перевірки отриманого результату побудуємо вибірковий простір події F:

$$F=\{7,8,9,10\}.$$

Як видно, $N_F=4$, так що

$$P(F)=\frac{N_F}{N_\Omega}=\frac{4}{10}=0{,}4.$$

1г) Подія G є об'єднанням подій $\bar{C}$ та B (D = $\bar{C}$ або B), причому події $\bar{C}$ та B є сумісними (вони можуть відбутися разом в одному випробуванні) і залежними. Ймовірність події D визначається за формулою додавання ймовірностей:

$$P(G)=P(\bar{C}\cup B)=P(\bar{C})+P(B)-P(\bar{C}\cap B)=$$

$$=1-P(C)+P(B)-(1-P(C))\cdot P(B|\bar{C})=(1-0{,}3)+0{,}4-(1-0{,}3)\cdot\frac{3}{7}=0{,}8.$$

Для перевірки отриманого результату побудуємо вибірковий простір події G:

$$G=\{1,2,4,5,7,8,9,10\}.$$

Як видно, $N_G=8$, так що

$$P(G)=\frac{N_G}{N_\Omega}=\frac{8}{10}=0{,}8.$$

2а) Умова „номер кулі не більше 6” відповідає запереченню події *B*, тобто $\bar{B}$, а умова „номер не кратний 3” – події $\bar{C}$ (заперечення події *C*). Випадкова подія *H* є їх перерізом, тобто $H=\bar{B}\cap\bar{C}$,

причому події $\bar{B}$ і $\bar{C}$ є сумісними і залежними.

Таким чином, ймовірність події *H* визначається за формулою множення ймовірностей

$$P(H)=P(\bar{B}\cap\bar{C})=P(\bar{B})\cdot P(\bar{C}|\bar{B})=(1-P(B))\cdot P(\bar{C}|\bar{B})=0{,}6\cdot\frac{4}{6}=0{,}4.$$

Правильність результату неважко перевірити шляхом побудови вибіркового простору події *H*.

2б) Умова „номер кулі парний” відповідає події *A*, а умова „номер кулі більше 6” – події *B*. Оскільки подія *I* полягає у здійсненні або події *A*, або події *B*, або їх разом, то подія *I* є об’єднанням подій A та B:

$$I=A\cup B.$$

Події A та B є сумісними і залежними. Отже, ймовірність події *I* визначається за формулою додавання ймовірностей:

$$P(I)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$$

$$=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B|A)=0{,}5+0{,}4-0{,}5\cdot\frac{2}{5}=0{,}7$$

Правильність результату неважко перевірити шляхом побудови вибіркового простору події *I*.

2в) Умова „номер кулі непарний” відповідає запереченню події *A*, а умова „номер кулі не кратний 3” – запереченню події *C*. Оскільки подія *J* полягає у здійсненні спільно і події $\bar{A}$, і події $\bar{C}$, то подія *J* є перерізом подій $\bar{A}$ та $\bar{C}$:

$$J=\bar{A}\cap\bar{C}.$$

Події $\bar{A}$ та $\bar{C}$ є сумісними і залежними. Отже, ймовірність події *J* визначається за формулою множення ймовірностей:

$$P(J)=P(\bar{A}\cap\bar{C})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{C}|\bar{A})=0{,}5\cdot\frac{3}{5}=0{,}3.$$

Правильність результату неважко перевірити шляхом побудови вибіркового простору події *J*.

Задачі

2.1. У партії із 20 деталей 15 стандартних, а решта нестандартні. Навмання беруть чотири деталі. Знайти імовірність того, що серед них:

1) не більше як дві нестандартні;
2) усі чотири стандартні;
3) принаймні одна нестандартна.

2.2. У цеху з восьми зупинок верстата в середньому чотири зумовлюються заміною різця; дві — несвоєчасним надходженням заготівок; решта — іншими причинами. Знайти ймовірність зупинки верстата з інших причин.
2.3. У разі масового виготовлення виробів брак становить у середньому 1,5 % загальної кількості всіх виробів. З-поміж придатних виробів 85,3 % становлять вироби 1-го сорту. Знайти ймовірність того, що навмання взятий виріб належить до 1-го сорту.
2.4. Довести, що добуток імовірностей протилежних подій не перевищує 0,25.
2.5. Партія складається з двох деталей 1-го сорту, двох 2-го сорту і трьох — 3-го сорту. Деталі беруть по одній навмання без повернення. Знайти ймовірність того, що деталь 1-го сорту з'явиться раніше за деталь 3-го сорту.
2.6. Від аеровокзалу відправились два автобуси. Імовірність своєчасного прибуття кожного з них дорівнює 0,92. Знайти ймовірність такої події:

A — обидва автобуси прибудуть своєчасно;

B — обидва автобуси запізняться;

C — тільки один автобус прибуде своєчасно.

2.7. Ймовірність отримання кредиту для першої особи дорівнює 0,6, а для другої – 0,5. Визначити ймовірність того, що принаймні одна особа отримає кредит.
2.8. Прилад, що працює протягом доби , складається з трьох вузлів, кожен з яких незалежно від інших може за цей час вийти з ладу. Якщо не працює хоча б один з вузлів, то прилад теж не працює. Ймовірність безвідмовної роботи протягом доби першого вузла дорівнює 0,9, другого – 0,85, третього – 0,8. Чому дорівнює ймовірність того, що протягом доби прилад працюватиме безвідмовно?

Тема 3. Умовні ймовірності. Незалежність подій.

Теоретичні відомості

Якщо ймовірність випадкової події *A* обчислюється за умови, що подія *B* відбулася, то така ймовірність називається *умовною*. Ця ймовірність обчислюється за формулою

$$\mathrm{P}\left(A/B\right)=\frac{P\,(A\cap B)}{P\,(B)},\ \ \mathrm{P}\left(B\right)\neq 0.$$

Випадкові події *A* і *B* називають *залежними*, якщо поява однієї з них (*A* або *B*) впливає на ймовірність появи іншої.

У протилежному випадку випадкові події *A* і *B* називаються *незалежними*.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Задана множина цілих чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Навмання беруть одне число. Яка ймовірність того, що це число виявиться кратним 3, коли відомо, що воно є непарним?

Розв'язання. Нехай подія *A* — поява числа кратного 3, *B* — кратного 2. Тоді $A = (3, 6, 9, 12)$, $m_1 = 4$; $B = (2, 4, 6, 8, 10, 12)$, $m_2 = 6$; $A\cap B = (6, 12)$, $m_3 = 2$;

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\right)=\frac{m_1}{n}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3};\ \mathrm{P}\left(\mathrm{B}\right)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2};\ \mathrm{P}\left(\mathrm{A}\bigcap \mathrm{B}\right)=\frac{m_3}{n}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6};$$

$$P\,(A\,/\,B)=\ \mathrm{P}\left(\mathrm{A}/\mathrm{B}\right)=\frac{P\,(A\bigcap B)}{P\,(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$

Приклад 2. Відомі значення:

$P\,(A\bigcap \overline{B})=0{,}3;\ P\,(\overline{A}\bigcap B)=0{,}4;\ P\,(\overline{A\bigcap B})=0{,}9.$

З'ясувати, чи є залежними випадкові події *A* і *B*.

Розв'язання.

$$P\,(A\bigcap B)=1-P\,(\overline{A}\bigcap \overline{B})=1-0{,}9=0{,}1;$$

$$P\,(A)=P\,(A\bigcap \overline{B})+P\,(A\bigcap B)=0{,}3+0{,}1=0{,}4;$$

$$P\,(B)=P\,(B\bigcap \overline{A})+P\,(A\bigcap B)=0{,}4+0{,}1=0{,}5;$$

$$P\left(A/B\right)=\frac{P\,(A\bigcap B)}{P\,(B)}=\frac{0{,}1}{0{,}5}=\frac{1}{5}=0{,}2;$$

$$P\left(B/A\right)=\frac{P\,(A\bigcap B)}{P\,(A)}=\frac{0{,}1}{0{,}4}=\frac{1}{4}=0{,}25.$$

Оскільки $P\left(A/B\right)\neq P(A),\ P(B)\neq P(B/A),$ то випадкові події *A* і *B* є залежними.

Задачі

3.1. Імовірність безвідказної роботи блока, що входить у систему впродовж певного часу дорівнює 0,9. Для надійності роботи системи встановлюється такий же блок, що буде знаходитись у резерві. Яка ймовірність безвідмовної роботи системи, коли при цьому враховувати резервний блок?

3.2. Радіолокаційна система, до якої входять дві станції, що працюють самостійно, виконує деяке завдання з виявлення літака-порушника повітряного простору України на певній ділянці кордону. Для виконання цього завдання необхідно, щоб у справному стані була хоча б одна радіолокаційна станція. Імовірність безвідказної роботи першої станції дорівнює 0,95, а другої 0,85. Система працюватиме надійно, якщо буде справною хоча б одна радіолокаційна станція. Знайти ймовірність цієї події.

3.3. В урні міститься 4 зелених і 8 червоних кульок. Кульки із урни виймають по одній без повернення. Таким способом було вийнято три кульки. Обчислити ймовірності таких випадкових подій A — перша кулька буде червоною, друга — зеленою, третя — червоною.

3.4. Відомо, що $A \cap B \neq \varnothing$. Довести, що

$$\mathrm{p}\left(\mathrm{B}/\mathrm{A}\right) \geq 1 - \frac{p(\overline{\bar{A}})}{p(\grave{A})}.$$

3.5. Тривалими спостереженнями встановлено, що приблизно 90 % підприємств перевіряються податковою інспекцією протягом певного терміну. Із загальної кількості перевірених у 40 % знаходять певні порушення. Знайдіть ймовірність того, що певне підприємство перевірять і знайдуть певні порушення.

Тема 4. Формули повної ймовірності. Формули Байєса.

Теоретичні відомості

У разі, коли випадкова подія A може відбутися лише за умови, що відбудеться одна з несумісних випадкових подій B_i, які утворюють повну групу і між собою є попарно несумісними $\left(B_i \bigcap B_j = \varnothing,\ i \neq j,\ i, j = 1, ..., n, \bigcup_{з=1}^{n} \hat{A}_i = \Omega \right)$, імовірність події A обчислюється за формулою

$$P(A) = \sum_{з=1}^{n} P(B_i)\ P(A / B_i),$$

яка називається *формулою повної ймовірності*.

Застосовуючи формулу множення ймовірностей для залежних випадкових подій A, B_i ($i = \overline{1, n}$), дістаємо *формули Байєса*

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i)\ P(A / B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\ P(A / B_i)}.$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. На двох верстатах-автоматах виробляють однакові деталі, які надходять на транспортер. Продуктивність першого верстата утричі більша, ніж другого, причому перший верстат виробляє нестандартну деталь з імовірністю 0,15, а другий — з імовірністю 0,2. Знайти ймовірність того, що навмання взята з транспортера деталь буде стандартною.

Розв'язання. Розглянемо події: B_1 — «деталь виготовлено на першому верстаті»; B_2 — «деталь виготовлено на другому верстаті»; A — «вибрана деталь стандартна». Події B_1 і B_2 несумісні й утворюють повну групу, що ж до події A, то вона може відбутись одночасно з кожною із цих подій. Умовні ймовірності настання події A відомі. Згідно з умовою, що продуктивність першого верстата утричі більша, ніж другого, знаходимо $P(B_1) = 0,75,\ P(B_2) = 0,25.$ За формулою повної ймовірності маємо: $P(A) = 0,75 \cdot 0,85 + 0,25 \cdot 0,8 = 0,8375.$

Приклад 2. Серед пацієнтів діагностичного центру 40% з району A, 20% – з району B, 25% – з району C і 15% – з району D. В районі A 20% населення є потерпілими від Чорнонобильської аварії, в районі B – 10%, в районі C – 12%, в районі D – 10%. Яка ймовірність, що навмання обраний пацієнт є потерпілим від Чорнобильської катастрофи?

Розв'язання. Введемо відносно випробування „випадковий вибір пацієнта" позначення випадкових подій:

A – пацієнт з району A,
B – пацієнт з району B,
C – пацієнт з району C,
D – пацієнт з району D,
K – пацієнт є потерпілим від Чорнобильської катастрофи.

Очевидно, події *A, B, C, D* утворюють повну групу випадкових подій відносно даного випробування, оскільки при випробуванні обов'язково відбувається якась одна і тільки одна з цих подій (дійсно, кожний пацієнт обов'язково належить до якогось з даних чотирьох районів, і він не може бути одночасно з двох чи більше районів). За умовою задачі визначимо ймовірності приналежності пацієнта до кожного з районів:

$$P(A)=0{,}40;\quad P(B)=0{,}20;\quad P(C)=0{,}25;\quad P(D)=0{,}15.$$

Подія *К* здійснюється тільки при здійсненні якоїсь із подій *A, B, C, D* і є залежною від них, так що, виходячи з умови задачі, можемо визначити умовні ймовірності події К:

$$P(\text{К}/\text{А})=0{,}20;\quad P(\text{К}/\text{В})=0{,}10;\quad P(\text{К}/\text{С})=0{,}12;\quad P(\text{К}/\text{D})=0{,}10.$$

Оскільки події *A, B, C, D* утворюють повну групу випадкових подій і подія К є залежною від них, то можемо застосувати формулу повної ймовірності, за якою ймовірність події *К* дорівнює:

$$P(K)=P(A)\cdot P(K|A)+P(B)\cdot P(K|B)+P(C)\cdot P(K|C)+P(D)\cdot P(K|D)=$$

$$=0{,}40\cdot 0{,}20+0{,}20\cdot 0{,}10+0{,}25\cdot 0{,}12+0{,}15\cdot 0{,}10=0{,}145$$

Отже, ймовірність того, що випадковий пацієнт діагностичного центру є потерпілим від Чорнобильської катастрофи становить 14,5%.

Приклад 3. На склад надходять однотипні вироби з чотирьох заводів: 15% — із заводу № 1, 25% — із заводу № 2; 40% — із заводу № 3 і 20% — із заводу № 4. Під час контролю продукції, яка надходить на склад, установлено, що в середньому брак становить для заводу № 1 — 3%, заводу № 2 — 5%, заводу № 3 — 8% і заводу № 4 — 1%. Навмання взятий виріб зі складу виявився бракованим. Яка ймовірність того, що його виготовив завод №1?

Розв'язання. Позначимо B_1 гіпотезу проте, що виріб був виготовлений заводом № 1, B_2 — заводом № 2, B_3 — заводом № 3 і B_4 — заводом № 4. Ці гіпотези єдино можливі і несумісні. Нехай *A* — випадкова подія, що полягає в появі бракованого виробу.

За умовою задачі маємо:

$P(B_1)$ = 0,15, $P(B_2)$ = 0,25, $P(B_3)$ = 0,4, $P(B_4)$ = 0,2, $P(A/B_1)$ = 0,03, $P(A/B_2)$ = 0,05, $P(A/B_3)$ = 0,08, $P(A/B_4)$ = 0,01.

За формулою Байєса переоцінюємо першу гіпотезу B_1:

$$P\left(B_1/A\right)=\frac{P(B_1)\ P(A/B_1)}{P(B_1)\ P(A/B_1)+P(B_2)\ P(A/B_2)+P(B_3)\ P(A/B_3)+P(B_4)\ P(A/B_4)}=$$

$$=\frac{0{,}15\cdot 0{,}03}{0{,}15\cdot 0{,}03+0{,}25\cdot 0{,}05+0{,}4\cdot 0{,}08+0{,}2\cdot 0{,}01}=\frac{0{,}0045}{0{,}051}=\frac{45}{510}=\frac{3}{34}.$$

Задачі

4.1. Маємо дві партії деталей. Перша складається з 15 стандартних і 4 нестандартних, друга — із 10 стандартних і 3 нестандартних. Із першої партії береться одна деталь і перекладається у другу. Знайти ймовірність того, що деталь, яку після цього взяли із другої партії :

1) стандартна; 2) нестандартна.

4.2. Маємо три партії деталей. Перша складається з 10 стандартних і 4 нестандартних, друга — із 14 стандартних і 4 нестандартних, третя — із 16 стандартних і 5 нестандартних деталей. Із навмання вибраної партії береться деталь. Знайти ймовірність того, що деталь буде:

1) стандартною; 2) нестандартною.

4.3. Металеві заготівки для подальшої обробки надходять із двох цехів: 55 % із першого, 45 % із другого. При цьому продукція з першого цеху містить 3 %, а з другого цеху — 5 % браку. Знайти ймовірність того, що заготівка, яка надійшла на обробку:

1) придатна; 2) бракована.

4.4. На склад надходить продукція від двох підприємств. Від першого — 60 %, від другого — 40 %. Перше підприємство дає 80 % продукції 1-го сорту і 20 % 2-го сорту, а друге дає 70 % продукції 1-го сорту і 30 % 2-го сорту. Знайти ймовірність того, що навмання взята одиниця продукції буде:

1) першого сорту; 2) другого сорту.

4.5. Для посіву пшениці заготовлено насіння, серед якого 95 % 1-го сорту, 3 % 2-го та 2 % 3-го сорту. Імовірність того, що з насінини виросте колосок, в якому не менш ніж 50 зерен, для 1-го сорту насіння становить 0,5, для 2-го сорту — 0,2, для 3-го — 0,1. Знайти ймовірність того, що навмання взятий колосок у разі такого посіву матиме не менш як 50 зерен.

4.6. Вивчаються результати заліку з теорії ймовірностей у трьох групах. У першій групі є 30 студентів, з них 8 отримали відмінну оцінку, а в другій відповідно 28 і 6, в третій відповідно 32 і 8. Яка ймовірність, що навмання вибраний студент отримав на заліку відмінну оцінку?

4.7. Дві економічні операції, що проводяться підприємцем одночасно для досягнення однієї загальної мети, мають ймовірність успіху, рівну $p_1=0,8$; $p_2=0,6$. Необхідно визначити ймовірність того, що досягнуто успіху в результаті першої операції.

Тема 5. Повторення випробувань. Схема Бернулі. Поліноміальна схема. Граничні теореми в схемі Бернулі. Теореми Муавра-Лапласа. Формули Пуассона.

Теоретичні відомості

Імовірність того, що в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі подія A з'явиться m раз, подається у вигляді

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Імовірність того, що в результаті n незалежних експериментів подія A з'явиться від m_i до m_j раз, обчислюється так:

$$P_n(m_i \le m \le m_j) = \sum_{m=m_i}^{m_j} \tilde{N}_n^m p^m q^{n-m} = \sum_{m=m_i}^{m_j} \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. За добу у пологовому будинку народжено 5 немовлят. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,52. Знайти ймовірність того, що серед народжених

а) рівно троє хлопчиків;

б) не менше трьох дівчаток.

Розв'язання. Оскільки окремі народження є незалежними подіями і ймовірності народження хлопчика у кожному народженні є однаковими, то задача відповідає умовам випробувань Бернуллі (послідовні незалежні випробування).

Введемо позначення випадкових подій: A – народження хлопчика, A_3 – народження трьох хлопчиків з п'яти дітей, B – народження дівчинки, B_i – народження і дівчаток з п'яти дітей, C – народження не менше трьох дівчаток з п'яти дітей.

За умовою маємо

$$P(A) = p = 0{,}52; \qquad P(B) = P(\overline{A}) = q = 1 - 0{,}52 = 0{,}48.$$

а) Ймовірність того, що серед народжених рівно троє хлопчиків визначаємо за формулою Бернуллі:

$$P(A_3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^{5-3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} \cdot 0{,}52^3 \cdot 0{,}48^2 = 0{,}324.$$

б) Подія C полягає у народженні або 3, або 4, або 5 дівчаток, які являють собою несумісні події, так що подія C є їх об'єднанням. Отже, у відповідності з теоремою додавання ймовірностей і формулою Бернуллі, для ймовірності народження не менше трьох дівчаток маємо:

$$P(C) = P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) =$$

$$= C_5^3 \cdot q^3 \cdot p^{5-3} + C_5^4 \cdot q^4 \cdot p^{5-4} + C_5^5 \cdot q^5 \cdot p^{5-5} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} \cdot 0{,}48^3 \cdot 0{,}52^2 +$$

$$+ \frac{5!}{4!\cdot 1!} \cdot 0{,}48^4 \cdot 0{,}52^1 + \frac{5!}{5!\cdot 0!} \cdot 0{,}48^5 \cdot 0{,}52^0 = 0{,}462.$$

Приклад 2. На кожні 40 відштампованих виробів у середньому припадає 4 дефектних. Із усієї продукції навмання узято 400 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них 350 виробів будуть без дефектів.

Розв'язання. Подія *A* — «узято виріб без дефекту». За умовою $P(A) = p = 0{,}9$. Проведено $n = 400$ незалежних випробувань. Розв'яжемо задачу за формулою локальної теореми

Лапласа: $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$, $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$. Підставляючи дані за умовою задачі, дістаємо: $x = \frac{350 - 400 \cdot 0{,}9}{\sqrt{400 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} \approx -1{,}67$. За таблицями знаходимо $\varphi(-1{,}67) = 0{,}0989$, беручи до уваги, що $\varphi(x)$ — парна функція.

Отже, $P_{400}(350) \approx \frac{0{,}0989}{6} \approx 0{,}0165$.

Приклад 3. Завод відправив на базу 1000 доброякісних виробів. За час перебування в дорозі кожний виріб може бути пошкоджено з імовірністю 0,003. Знайти ймовірність того, що на базу прибудуть 3 пошкоджені вироби.

Розв'язання. Якщо подія *A* — «виріб пошкоджено», то її ймовірність p = 0,003. Розглядається схема незалежних випробувань, n = 1000. Імовірність події *A* досить мала, тому задачу розв'яжемо за формулою Пуассона: $P_n(m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}$.

Виконуючи обчислення, знаходимо: $a = np = 1000 \cdot 0{,}003 = 3$; $P_{1000}(3) \approx \frac{3^3}{3!} e^{-3} \approx 0{,}229$.

Приклад 4. Зерна пшениці проростають з імовірністю 0,95. Знайти ймовірність того, що із 2000 посіяних зерен зійде від 1880 до 1920.

Розв'язання. Подія *A* — «зерно пшениці зійшло». Її імовірність p = 0,95, кількість незалежних випробувань n = 2000. Застосуємо формулу інтегральної теореми Лапласа:

$$P_n(m_1; m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \ x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}},$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}, \ \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ —}$$

функція Лапласа, а далі виконаємо обчислення:

$$x_1 = \frac{1880 - 2000 \cdot 0{,}95}{\sqrt{2000 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05}} \approx -1{,}03; \ x_2 = \frac{1920 - 1900}{\sqrt{95}} \approx 2{,}06;$$

$$P_{2000}(1880;1920) \approx \Phi(2,06) - \Phi(-1,03) = \Phi(2,06) +$$
$$+\Phi(1,03) = 0,4803 + 0,3485 = 0,8288.$$

Значення функції Лапласа беруться з відповідної таблиці.

Приклад 5. Верстат-автомат виготовляє стандартну деталь з імовірністю 0,9. Із продукції беруть партію деталей. Скільки деталей має містити партія, щоб з імовірністю 0,9973 можна було стверджувати: у партії відхилення відносної частоти появи нестандартної деталі від імовірності її виготовлення не перевищуватиме 0,03? Визначити можливу кількість нестандартних деталей у партії за даних умов.

Розв'язання. Подія A — «виготовлено нестандартну деталь». Маємо схему з n незалежними випробуваннями, в якій $P(A) = p = 0{,}1$. Скористаємося формулою:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0{,}9973;\ \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0{,}49865.$ За таблицями знаходимо $\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} = 3;\ n = \frac{9pq}{\varepsilon^2} = 900.$

Визначимо кількість нестандартних деталей у партії за даних умов, розв'язавши нерівність:

$$\left|\frac{m}{900} - 0{,}1\right| < 0{,}03;\ -0{,}03 < \frac{m}{900} - 0{,}1 < 0{,}03;\ 0{,}07 < \frac{m}{900} < 0{,}13;\ 63 < m < 117.$$

Отже, у партії із 900 деталей буде від 63 до 117 нестандартних деталей.

Задачі

5.1. Садівником восени було посаджено сім саджанців яблуні. Імовірність того, що будь-який із саджанців навесні проросте, у середньому складає 0,7. Обчислити ймовірність того, що із семи саджанців яблуні навесні проростуть: 1) три саджанці; 2) не менш як три. Знайти найімовірніше число саджанців, які навесні проростуть, і обчислити відповідну ймовірність.

5.2. Завод виготовляє однотипні телевізори, з яких 85% вищої якості. Із партії виготовлених заводом телевізорів навмання вибирають сім. Яка ймовірність того, що серед них телевізорів вищої якості буде: 1) 4; 2) не менш як 4.

5.3. Відомо, що серед виробів заводу стандартні деталі становлять у середньому 85%. Скільки необхідно взяти цих деталей, щоб $m_0 = 65$?

5.4. Імовірність появи випадкової події в кожному з n незалежних експериментів за схемою Бернуллі є величиною сталою і дорівнює $p = 0{,}8$.

Скільки необхідно провести таких експериментів, щоб імовірність появи випадкової події $m \geq 900$ дорівнювала 0,99?

5.5. Частка діабетиків у певній місцевості становить у середньому 0,2%. Навмання було обстежено 4000 осіб. Яка ймовірність того, що серед них діабетиків буде: 1) 4 особи; 2) від 3 до 6 осіб; 3) не більш як 4 особи.

5.6. На кожні 30 штампованих виробів у середньому припадає 6 виробів з дефектом. Знайти ймовірність того, що з 5 навмання взятих виробів 3 виявляться без дефекту.

5.7. Імовірність виграшу облігації за весь період позики становить 0,6. Куплено 5 облігацій. Знайти ймовірність такої події:

1) виграють дві облігації;
2) виграш випаде принаймні на одну облігацію;
3) виграють не більш як дві облігації.

5.8. Для забезпечення роботи на деякому будівельному об’єкті автопідприємство має 6 автомобілів. Імовірність виходу кожного автомобіля на лінію в першу зміну дорівнює 0,8. Знайти ймовірність нормальної роботи автопідприємства, якщо для цього в першу зміну потрібно мати на лінії не менш як 4 автомобілі.

5.9. Яку частку (у відсотках) виробів 1-го сорту має виробляти автомат, щоб у партії із 100 навмання взятих виробів найімовірніша кількість виробів 1-го сорту дорівнювала 80?

5.10. Частка 2-го сорту деякої масової продукції в середньому становить 20 %. Навмання взято 100 примірників цієї продукції. Яка кількість виробів 2-го сорту в утвореній групі найімовірніша і яка ймовірність того, що в цій групі буде саме така кількість виробів 2-го сорту?

5.11. Посівний фонд містить 92 % насіння 1-го сорту. Навмання взято 150 зерен. Знайти ймовірність того, що серед них 140 зерен 1-го сорту.

5.12. Прядильниця обслуговує 1000 веретен. Імовірність обриву нитки на одному веретені протягом 1 хв дорівнює 0,005. Знайти ймовірність того, що протягом 1 хв буде обрив нитки на двох веретенах.

5.13. До банку надійшло 5000 пачок грошових знаків. Імовірність того, що пачку неправильно вкомплектовано, дорівнює 0,0004. Знайти ймовірність того, що серед одержаних пачок буде не більш як одна неправильно укомплектована.

5.14. Частка 1-го сорту в деякій продукції в середньому становить 80 %. Скільки примірників цієї продукції треба взяти, щоб з імовірністю 0,9 можна було стверджувати, що в партії буде не менш як 75 примірників 1-го сорту?

Задачі для самостійного розв'язування

1. Партія складається зі стандартних і нестандартних деталей, які ретельно перемішані. З неї навмання беруть дві деталі. Визначити: 1)простір елементарних подій; 2)множини елементарних подій для таких подій: а) A_1 – поява однієї стандартної і однієї нестандартної деталей; б) A_2 – поява не менш як однієї стандартної деталі; в) A_3 – поява не більш як однієї стандартної деталі.

2. Робітник виготовив *n* деталей. Нехай подія $A_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ полягає в тому, що *i*-та деталь має дефект. Записати такі події: 1)ні одна з деталей не має дефектів; 2)принаймні одна деталь має дефект; 3)лише одна деталь має дефект.

3. Партія з 10 деталей містить 4 браковані. Знайти ймовірність того, що з навмання взятих двох деталей будуть: 1)дві придатні; 2)дві браковані; 3)1 придатна і 1 бракована.

4. Партія складається з 20 виробів, з яких 8 виробів 1-го сорту, 6–2-го, 2–3-го сорту, а решта – браковані. Навмання беруть 4 вироби. Знайти ймовірність того, що серед них виявилося 2 вироби 1-го сорту, 1–2-го сорту і 1 бракований.

5. Навмання взятий телефонний номер складається із 6 цифр. Знайти ймовірність того, що в ньому всі цифри різні.

6. На прямокутній полиці навмання розставлено 8 томів зібрання творів. Знайти ймовірність того, що в результаті I, II і III томи стоять поруч.

7. Набираючи номер телефону, абонент забув дві останні цифри і, вважаючи, що вони різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрано правильні цифри.

8. У лотереї на кожні 500 білетів розігрується 100 речових і 50 грошових виграшів. Знайти ймовірність виграшу для особи, яка має один білет.

9. 60 % студентів одного із інститутів займаються спортом, 40 % беруть участь у гуртках художньої самодіяльності, 20 % займаються спортом і беруть участь у гуртках художньої самодіяльності. Знайдіть ймовірність того, що навмання вибраний студент:
а) займається хоча б одним з двох згаданих видів діяльності ;
б) не займається жодним.

10. Відділ технічного контролю навмання відібрав 200 одиниць готової продукції і виявив серед них 12 одиниць, що не відповідають стандарту. Визначити відносні частоти появи бракованої і стандартної одиниць продукції, якщо навмання береться одна одиниця продукції

11. На двох верстатах-автоматах виробляються однакові заготівки, які транспортером перекидаються в те саме місце. Продуктивність другого верстата в 1,5 рази більша, ніж першого. Перший верстат дає 5 % нестандартних заготівок, а другий — 93 % стандартних. Знайти ймовірність того, що взята навмання заготівка буде: 1) стандартна; 2) нестандартна.

12. На конвеєр надходять деталі від трьох автоматів. Перший дає 90%, другий – 93%, а третій – 95% придатної продукції. Протягом зміни від першого автомата

надходить 60, від другого – 50, від третього – 40 деталей. Знайти ймовірність потрапляння на конвеєр: 1) нестандартної деталі; 2)стандартної деталі.
13. На складі зберігаються кінескопи, 70% яких виготовлено на заводі № 1, а решта – на заводі № 2. Ймовірність того, що кінескоп витримає гарантійний строк, дорівнює 0,9 для заводу № 2 і 0,8 для заводу № 1. Знайти ймовірність того, що навмання взятий кінескоп: 1) не витримає гарантійного строку; 2) витримає гарантійний строк.
14. Маємо 50 комплектів деталей. Відомо, що кількість комплектів із дефектами серед них може з однаковою ймовірністю становити 0, 1 або 2. Знайти ймовірність того, що навмання взяті 3 комплекти виявилися без дефектів.
15. Деталі 2-го сорту становлять 2/3 усіх деталей, які є в партії. Знайти ймовірність того, що з 4 навмання взятих деталей 3 виявляться 2-го сорту.
16. Частка 3-го сорту становить у деякій масовій продукції у середньому 20 %. Знайти ймовірність того, що з п’яти узятих примірників продукції не менш як три будуть 3-го сорту.
17. У партії, яка складається із виробів двох сортів, виробів 2-го сорту в 1,5 рази більше, ніж 1-го. Знайти ймовірність того, що серед трьох навмання взятих виробів принаймні один буде 1-го сорту.
18. Автомат штампує вироби 1-го сорту з ймовірністю 0,6. Скільки виробів має містити партія, щоб найімовірніша кількість виробів 1-го сорту становила 55?
19. Промтоварна база обслуговує 8 магазинів. Заявки на товар на наступний день можуть надходити від кожного магазину з імовірністю 0,6. Знайти найімовірнішу кількість заявок, які можуть надходити на базу щодня, а також імовірність надходження такої кількості заявок.
20. Знайти найімовірнішу кількість зупинок прядильного верстата протягом години роботи, якщо середня кількість зупинок за кожні 12 хв дорівнює 4.
21. Яку частку (у відсотках) виробів 1-го сорту має виробляти автомат, щоб у партії із 100 навмання взятих виробів найімовірніша кількість виробів 1-го сорту дорівнювала 80?
22. Частка заготівок із відхиленням від установленого стандарту при обточуванні таких заготівок становить у середньому 0,11 усієї кількості обточених заготівок. Знайти ймовірність того, що із 70 обточених заготівок 62 відповідають стандарту.
23. Ймовірність своєчасної сплати податків для першого підприємства дорівнює 0,85, для другого – 0,75, для третього – 0,65. Визначити ймовірність своєчасної сплати податків:
а) не більше ніж одним підприємством;
б) тільки одним підприємством;
в) не більше ніж двома підприємствами;
г) не менше ніж двома підприємствами..
24. Ймовірність того, що під час сортування скляний виріб буде розбито, дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що із 1500 виробів при сортуванні буде розбито 4. 56. Деталі 1-го сорту становлять у середньому 2/3 усіх деталей,

що їх виготовляє верстат-автомат. Навмання взято 300 деталей. Знайти ймовірність того, що серед них буде від 190 до 210 деталей 1-го сорту.

25. На трьох верстатах-автоматах виготовляються однакові деталі. Перший верстат дає 5 % браку, другий – 7 %, третій – 9 %. Із продукції кожного верстата навмання взято по одній деталі. Знайти ймовірність того, що серед них виявилось: 1) 0, 1, 2, 3 придатних; 2) принаймні одна деталь придатна; 3) принаймні одна деталь бракована.

26. Ймовірність банкрутства для першої фабрики дорівнює 0,2, для другої – на 50 % більше, ніж для першої, для третьої дана ймовірність є розв'язком рівняння $10p^2+9p^2=1$. Визначити ймовірність банкрутства тільки однієї фабрики.

27. Ймовірність своєчасного складання звіту для першого економіста дорівнює 0,9, для другого ця ймовірність є додатнім коренем рівняння $9p^2=6p$. Визначити ймовірність несвоєчасного складання звіту двома економістами.

28. Два економіста заповнюють документи, які складають у спільну папку. Ймовірність зробити помилку в документі для першого економіста – 0,1, для другого – 0,3. Перший економіст заповнив 40 документів, другий – 60. Навмання взятий з папки документ виявився з помилкою. Визначити ймовірність того, що його склав перший економіст.

29. Фірма складається із двох філіалів. Вона існуватиме, якщо хоча б один із філіалів своєчасно даватиме прибуток. Перший філіал дає заданий прибуток з ймовірністю 0,7, для другого ця ймовірність є розв'язком рівняння $5p^2–13p+6=0$. Фірма проіснувала певний термін. Знайдіть ймовірність того, що це відбулося за рахунок прибутку від першого філіалу.

30. Ймовірність повної сплати податків для першої групи підприємств 4/5, для другої групи ця ймовірність задовольняє рівняння $9–9p=4p^2$. До першої групи входить 70 підприємств, а до другої групи – 30. Знайдіть ймовірність повної сплати податків.

31. Ймовірність виконання договору для першої фірми 0,5, для другої – 0,7, для третьої ця ймовірність складає 60 % від суми ймовірностей першої та другої фірми. Податкова інспекція довільним чином перевіряє кожну із фірм. Знайдіть ймовірність, що при перевірці буде знайдено порушення договору. Обчисліть ймовірність, що знайдене порушення допущене другою фірмою.

РОЗДІЛ 2. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Тема 6. Випадкові величини. Дискретні випадкові величини. Дискретні розподіли.

Теоретичні відомості

Величина називається *випадковою*, якщо внаслідок проведення експерименту під впливом випадкових факторів вона набуває того чи іншого можливого числового значення з певною ймовірністю.

Якщо множина можливих значень випадкової величини є зчисленною то таку величину називають *дискретною*. У противному разі її називають *неперервною*.

Функцію аргументу x, що визначає ймовірність випадкової події $X < x$, називають *функцією розподілу ймовірностей*:

$$F(x) = P(X < x)$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

$X = x_i$	-4	-1	2	6	9	13
$P(X = x_i) = p_i$	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2

Побудувати $F(x)$ та її графік.

Розв'язання. Згідно з властивостями $F(x)$, дістаємо наведені далі співвідношення.

1) $F(-4) = P(X < -4) = 0$;

2) $F(-1) = P(X < -1) = P(X = -4) = 0{,}1$;

3) $F(2) = P(X < 2) = P(X = -4) + P(X = -1) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$;

4) $F(6) = P(X < 6) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) = 0{,}1 + 0{,}2 + + 0{,}1 = 0{,}4$;

5) $F(9) = P(X < 9) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 6) = = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}7$;

6) $F(12) = P(X < 13) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 9) = = 0{,}1 + 0{,}2 +0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}8$;

7) $F(x)|_{x>13} = P(X > 13) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 9) + + P(X = 13) = 0{,}1 + 0{,}2 +0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}2 = 1$.

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \le -4; \\ 0{,}1, & -4 < x \le -1; \\ 0{,}3, & -1 < x \le 2; \\ 0{,}4, & 2 < x \le 6; \\ 0{,}7, & 6 < x \le 9; \\ 0{,}8, & 9 < x \le 12; \\ 1, & x > 12. \end{cases}$$

Маємо компактний запис $F(x)$.

Графік функції $F(x)$ зображено на рис. 1.

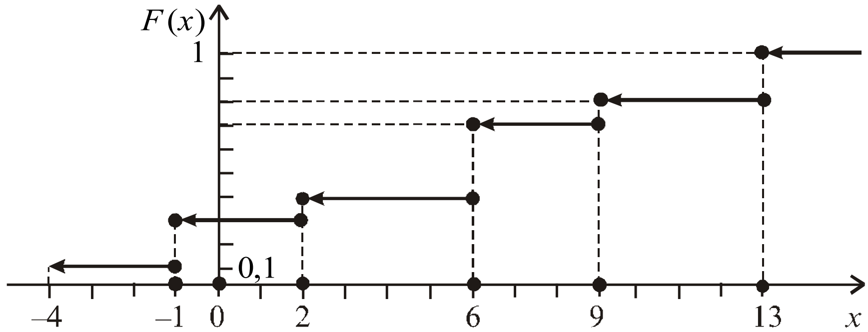


Рисунок 1.

Задачі

6.1. Троє складають іспит із теорії ймовірностей. Імовірність того, що перший студент складе екзамен, становить 0,9, для другого та третього студентів ця ймовірність дорівнює відповідно 0,85; 0,8. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X — числа студентів, які складуть іспит з теорії ймовірностей, побудувати $F(x)$ і накреслити її графік.

6.2. У першому ящику міститься 7 стандартних і 3 браковані деталі, у другому — 6 стандартних і 4 браковані. Навмання з першого ящика беруть чотири деталі, а з другого — одну. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X — появи числа стандартних деталей серед чотирьох навмання взятих — і побудувати $F(x)$.

6.3. На шляху руху автомобіля стоять п’ять світлофорів, кожний із яких з імовірністю 0,5 дозволяє або забороняє рух. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X — числа світлофорів, що їх автомобіль промине без затримки.

6.4. За заданим законом розподілу дискретної випадкової величини X маємо:

$X = x_i$	-4	-1	2	5	8	10
$P(X = x_i) = p_i$	a	$1{,}5a$	$0{,}5a$	$3{,}5a$	$2{,}5a$	a

Знайти a. Обчислити: $P(X < 2)$, $P(-4 < X \le 8)$.

Побудувати функцію розподілу ймовірностей і накреслити її графік.

6.5. Дискретну випадкову величину X задано такою функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ 0{,}3, & \text{якщо } 0 < x \le 2; \\ 0{,}4, & \text{якщо } 2 < x \le 3; \\ 0{,}7, & \text{якщо } 3 < x \le 4; \\ 1, & \text{якщо } x > 4. \end{cases}$$

Знайти закон розподілу X у табличній формі.

Тема 7. Випадкові величини. Неперервні випадкові величини. Неперервні розподіли.

Теоретичні відомості

Для неперервних випадкових величин закон розподілу ймовірностей зручно описувати з допомогою щільності ймовірностей, яку позначають $f(x)$.

Властивості $f(x)$:

1. $f(x) \geq 0$. Ця властивість випливає з означення щільності ймовірності як першої похідної від $F(x)$ за умови, що $F(x)$ є неспадною функцією.

2. *Умова нормування* неперервної випадкової величини X:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\alpha x = 1.$$

3. Імовірність попадання неперервної випадкової величини в інтервал $[\alpha; \beta]$ обчислюється за формулою

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

4. Функція розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини має вигляд

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Закон неперервної випадкової величини X задано у вигляді:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \dfrac{1}{2}\sin x, & 0 < x \leq \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Знайти $F(x)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$. Обчислити $P\left(\dfrac{\pi}{6} < X < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. Згідно із властивістю 4 щільності маємо:

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx = \int_0^x \frac{1}{2}\sin dx = \frac{1}{2}\int_0^x \sin dx = \frac{1}{2}(-\cos x|_0^x) = \frac{1}{2}(-\cos x + 1) =$$

$$= \frac{1 - \cos x}{2}.$$

Отже, функція розподілу ймовірностей буде така:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \dfrac{1}{2}(1 - \cos x), & 0 < x \leq \pi; \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

Графіки функцій $f(x)$, $F(x)$ зображені відповідно на рис. 2 і 3.

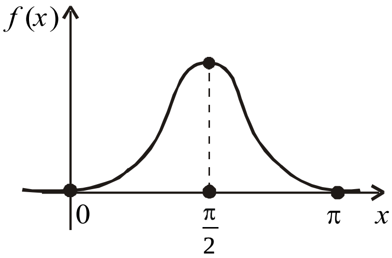


Рисунок 2

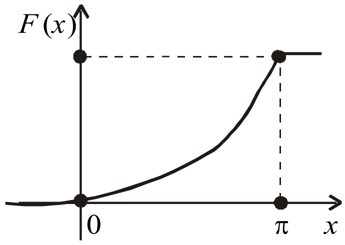


Рисунок 3

Застосуємо 3 властивість щільності:

$$P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{4}\right) = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}.$$

Приклад 2. Неперервна випадкова величина X задана функцією густини розподілу ймовірності

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ ax, & 0 \le x \le 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

а) Знайти константу a і вираз функції розподілу.

Розв'язання. а) Константу a визначаємо за допомогою умови нормування:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Проінтегруємо функцію густини розподілу:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\cdot dx + \int\limits_{0}^{1} axdx + \int\limits_{1}^{+\infty} 0\cdot dx = \frac{ax^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{a}{2}.$$

У відповідності з умовою нормування звідси отримуємо рівняння $\frac{a}{2} = 1$,

звідки $a = 2$.

Отже, функція густини розподілу є

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 2x, & 0 \le x \le 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Інтегруючи функцію густини розподілу по трьох інтервалах області визначення, знаходимо функцію розподілу ймовірності величини X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 4x^2, & 0 \le x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Задачі

7.1. Задано функцію розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \sin x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{2};\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Знайти $f(x)$. Побудувати графіки $F(x)$, $f(x)$ і обчислити $P\left(\dfrac{\pi}{6}<X<\dfrac{\pi}{3}\right)$.

7.2. Випадкова величина X має закон розподілу ймовірностей Коші:

$$f(x)=\frac{a}{1+x^2}, \qquad -\infty<x<\infty.$$

Знайти a і $F(x)$.

7.3. Крива щільності ймовірності — півеліпс із півосями $a = 4$; $b = 2$.
Записати вираз для $f(x)$ і $F(x)$.
Побудувати графік функції $F(x)$.

7.4. Закон розподілу неперервної випадкової величини X такий:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \dfrac{(x+1)^3}{64}, & -1<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Знайти $f(x)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$, $P(0 < X < 2)$.

7.5. Випадкова величина X задається функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x<a,\\ bx^2-\dfrac{1}{3}, \text{ якщо } a<x\le 2,\\ 1, \text{ якщо } x>2.\end{cases}$$

Знайти $a,b,$ $P(1{,}2 \le X < 1{,}5)$, $f(x)$ і медіану Me.

7.6. Графік щільності розподілу — півколо з центром у початку координат. Знайти аналітичний вираз для $f(x)$, функцію розподілу.

Тема 8. Числові характеристики випадкових величин. Математичне сподівання, дисперсія та їх властивості. Моменти розподілу випадкових величин. Коефіцієнт асиметрії, коефіцієнт ексцесу. Мода, медіана.

Теоретичні відомості

Математичним сподіванням випадкової величини X, визначеною на дискретному просторі Ω, називається величина $M\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$.

Якщо Ω — обмежена множина, то $M\xi = \sum_{s=1}^{n} x_i p_i$.

Якщо простір Ω є неперервним, то математичним сподіванням неперервної випадкової величини X називається величина $M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$.

Дисперсією випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$.

Дисперсію можна обчислити і за такою формулою:

$$D\xi = M\xi^2 - \left(M\xi\right)^2.$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

x_i	– 4	– 2	1	2	4	6
p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Обчислити $D(X)$, $\sigma(X)$.

Розв'язання. Згідно з формулою для знаходження дисперсії маємо:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{6} x_i p_i\right)^2;$$

$$M(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = -4 \cdot 0{,}1 - 2 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}1 =$$

$$= -0{,}4 - 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}6 = 0{,}9;$$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i = 16 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 + 16 \cdot 0{,}1 + 36 \cdot 0{,}1 =$$

$$= 1{,}6 + 0{,}8 + 0{,}3 + 0{,}8 + 1{,}6 + 3{,}6 = 8{,}7;$$

$$D(X) = 8{,}7 - (0{,}9)^2 = 8{,}7 - 0{,}81 = 7{,}89;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{7{,}89} \approx 2{,}8.$$

Задачі

8.1. Випадкова величина ξ має розподіл:

ξ	1	2	3
p	0,5	0,3	0,2

Знайти $M\xi$, $D\xi$, σ_ξ, початкові та центральні моменти до 3-го порядку включно.

8.2. Робітник за зміну обслуговує 14 однотипних верстатів-автоматів. Імовірність того, що верстат за зміну потребує уваги робітника становить 1/7. Знайти $M\xi$, $D\xi$, σ_ξ дискретної випадкової величини ξ — числа верстатів-автоматів, що потребують уваги робітника за зміну.

8.3. Випадкова величина ξ має розподіл:

ξ	0	1	2
p	0,3	0,5	0,2

Знайти $M\xi$, $D\xi$, σ_ξ, початкові та центральні моменти до 3-го порядку включно.

8.4. Знайти $M\xi$, $D\xi$, σ_ξ, $\alpha_0,..,\alpha_3$, $\mu_1,..,\mu_3$, якщо випадкова величина ξ має розподіл:

ξ	-1	0	1	2
p	0,1	0,4	0,2	0,3

8.5. Знайти $M\xi$, $D\xi$, σ_ξ, $\alpha_0,..,\alpha_3$, $\mu_1,..,\mu_3$, якщо випадкова величина ξ має розподіл:

ξ	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Тема 9.Числові характеристики випадкових векторів. Умовні закони розподілу. Математичне сподівання. Коваріація, коефіцієнт кореляції. Умовні закони розподілу і їх характеристика.

Теоретичні відомості

Законом розподілу двох дискретних випадкових величин називають перелік можливих значень $Y = y_i$, $X = x_j$ та відповідних їм імовірностей спільної появи.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}x_j p_{ij}=\sum_{j=1}^{m}x_j p_{x_j}.$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)$$

$$\sigma(X)=\sigma_x=\sqrt{D(X)}.$$

$$M(Y)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}y_i p_{ij}=\sum_{i=1}^{k}y_i p_{y_i}.$$

$$D(Y)=M(Y^2)-M^2(Y)$$

$$\sigma(Y)=\sigma_y=\sqrt{D(Y)}.$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Задано закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин (X, Y):

$X = x_j$ / $Y = y_i$	5,2	10,2	15,2	P_{yi}
2,4	$0,1a$	$2a$	$0,9a$	
4,4	$2a$	$0,2a$	$1,8a$	
6,4	$1,9a$	$0,8a$	$0,3a$	
P_{xj}				

Знайти a. Обчислити $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(X)$; $M(Y)$; $D(Y)$; $\sigma(Y)$; K_{xy}; r_{xy};

Розв'язання. Скориставшись умовою нормування дістанемо:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}P_{ij}=0,1a+2a+0,9a+2a+0,2a+1,8a+1,9a+0,8a+0,3a=1\Rightarrow a=0,1.$$

Зі знайденим a закон системи набирає такого вигляду:

$X = x_j$ / $Y = y_i$	5,2	10,2	15,2	P_{yi}
2,4	0,01	0,2	0,09	0,3
4,4	0,2	0,02	0,18	0,4
6,4	0,19	0,08	0,03	0,3
P_{xj}	0,4	0,3	0,3	

Обчислюємо основні числові характеристики:

$$M(X)=\sum_{j=1}^{3}x_j p_{x_j}=5,2\cdot 0,4+10,2\cdot 0,3+15,2\cdot 0,3=2,08+3,06+4,56=9,7;$$

$$M(X^2)=\sum_{j=1}^{3}x_j^2 p_{x_j}=(5,2)^2\,0,4+(10,2)^2\,0,3+(15,2)^2\,0,3=$$

$$=10,816+31,212+69,312=111,34;$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=111,34-94,09=17,25;$$

$$\sigma_x=\sqrt{D(X)}=4,15;$$

$$M(Y)=\sum_{i=1}^{3}y_i p_{y_i}=2,4\cdot 0,3+4,4\cdot 0,4+6,4\cdot 0,3=0,72+1,76+1,92=4,4;$$

$$M(Y^2)=\sum_{i=1}^{3}y_i^2 p_{y_i}=(2,4)^2\,0,3+(4,4)^2\,0,4+(6,4)^2\,0,3=$$

$$=1,728+7,744+12,288=21,76;$$

$$D(Y)=M(Y^2)-M^2(Y)=21,76-(4,4)^2=21,76-19,36=2,4;$$

$$\sigma_y=\sqrt{D(Y)}=1,55;$$

$$M(XY)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}y_i x_j p_{ij}=2,4\cdot 5,2\cdot 0,01+2,4\cdot 10,2\cdot 0,2+2,4\cdot 15,2\cdot 0,09+$$

$$+4,4\cdot 5,2\cdot 0,2+4,4\cdot 10,2\cdot 0,02+4,4\cdot 15,2\cdot 0,18+6,4\cdot 5,2\cdot 0,19+$$

$$+6,4\cdot 10,2\cdot 0,08+6,4\cdot 15,2\cdot 0,03=0,1248+4,896+3,2832+4,576+$$

$$+0,8976+12,0384+6,3232+5,2224+2,9184=40,28;$$

$$K_{xy}=M(XY)-M(X)\,M(Y)=40,28-9,7\cdot 4,4=40,28-42,68=1,4.$$

Оскільки $K_{xy}>0$, то між відповідними величинами існує кореляційний зв’язок. Для вимірювання тісноти кореляційного зв’язку обчислимо коефіцієнт кореляції

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{-2,4}{4,15\cdot 1,55}\approx 0,37.$$

Задачі

9.1. Закон системи двох дискретних випадкових величин (X, Y) заданий таблицею:

Y \ X	2	4	6	8	p_{y_i}
– 6	$0,1a$	$0,5a$	$0,4a$	a	
– 4	$0,9a$	$0,4a$	$0,5a$	$0,2a$	
– 2	a	$2,1a$	$1,1a$	$1,8a$	
p_{x_i}					

Обчислити r_{xy}, $M(X/y=4)$, $M(Y/x=-2)$.

9.2. Виготовлені на заводі циліндри сортуються за відхиленням їх внутрішніх діаметрів від номінального розміру на чотири групи зі значеннями 0,01; 0,02; 0,03; 0,04 мм і за овальністю на чотири групи зі значеннями 0,002; 0,004; 0,006; 0,008 мм. Спільний розподіл цих відхилень X — діаметра і Y — овальності циліндрів наведено в таблиці:

Y \ X	0,01	0,02	0,03	0,04	p_{y_i}
0,002	0,01	0,02	0,04	0,04	
0,004	0,03	0,24	0,15	0,06	
0,006	0,04	0,1	0,08	0,08	
0,008	0,02	0,04	0,03	0,02	
p_{x_j}					

Знайти r_{xy}.

9.3. Дискретну двовимірну випадкову величину (X,Y) задано законом розподілу

y_j / x_i	1	3	4
– 1	0,04	$2a$	0,1
0	0,05	0,2	0,1
2	a	0,05	0,01

Знайти: 1) параметр a; 2) закони розподілу випадкових величин X і Y;
3) функцію розподілу $F(x,y)$; 4) функції розподілу $F_1(x)$ і $F_2(y)$;
5) $P(1{,}3 < X < 5; -0{,}1 < Y < 1)$; 6) $M(X)$ і $M(Y)$; 7) $D(X)$ і $D(Y)$;
8) r_{xy}; 9) $M(X \mid Y = 0)$.

9.4. Дискретну двомірну випадкову величину (X,Y) задано законом розподілу:

y_j/x_i	–2	–1	0	2
1	0,03	0,07	0,25	0,08
2	0,04	0,05	0,1	0,15
4	0,02	0,01	0	0,2

Знайти: 1) закони розподілу випадкових величин X та Y; 2) функцію розподілу $F(x, y)$; 3) функції розподілу $F_1(x)$ і $F_2(y)$; 4) $P(X < 1, Y < 3)$.

Тема 10. Основні дискретні та неперервні розподіли.

Теоретичні відомості

1. Біноміальний закон розподілу $MX = np, \ DX = np(1-p)$.
2. Закон розподілу Пуассона $MX = \lambda, \quad DX = \lambda.$
3. Геометричний розподіл $MX = \frac{1}{p}, \quad DX = \frac{1-p}{p^2}.$
4. Гіпергеометричний розподіл $MX = \frac{kn}{N}, \ DX = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)}.$
5. Рівномірний закон розподілу $MX = \frac{a+b}{2}, \ DX = \frac{(b-a)^2}{12}.$
6. Показниковий закон розподілу $MX = \frac{1}{a}, \ DX = \frac{1}{a^2}.$
7. Нормальний закон розподілу $MX = a, \quad DX = \sigma^2.$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. У цеху є 5 верстатів. Імовірність того, що верстат працює, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що працюватимуть не менш як 3 верстати.

Розв'язання. Імовірність того, що працює будь-який верстат, дорівнює 0,8. Тому справджується біноміальний закон розподілу: $P(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \ m = 0,1,2,...,n;$

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5).$$

Зазначені ймовірності знайдемо за наведеною щойно формулою.

$$P(X \geq 3) = C_5^3 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^2 + C_5^4 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2 + 0,8^5 =$$
$$= 0,2048 + 0,4096 + 0,32768 = 0,94208.$$

Приклад 2. Визначити ймовірність потрапляння за контрольні межі не менш ніж 2 деталей із проби з 5 деталей, якщо автомат, із продукції якого беруться проби, обробляє 2 деталі за 1 хв і за зміну у його продукції виявляється 38 деталей, які виходять за контрольні межі. Застосувати для розв'язування задачі закон розподілу Пуассона.

Розв'язання. Застосуємо формулу розподілу Пуассона: $P(X = m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!}, \ m =$ 0,1,…. Знайдемо λ — середню кількість бракованих деталей, які виготовляються за 1 хв. Якщо тривалість зміни 480 хв, то $\lambda = \frac{38}{480} \approx 0,08.$ Пробу з 5 деталей виготовляють за $t = \frac{5}{2} = 2,5$ хв, $\lambda t = 0,08 \cdot 2,5 = 0,2.$ Знайдемо шукану ймовірність: $P(X \geq 2) = \sum_{m=2}^{5} \frac{(\lambda t)^m}{m!} = 0{,}0175$. Значення ймовірності знайдемо в таблицях при $\lambda t = 0{,}8$ і $m = 2$.

Задачі

10.1. Брак при виготовленні деталей становить у середньому 5 %. Знайти ймовірність того, що серед 5 навмання взятих деталей: а) не виявиться жодної бракованої; б) буде дві браковані деталі.

10.2. В електромережу ввімкнено 4 прилади, потужність кожного з них 660 Вт. Знайти ймовірність того, що мережу буде знеструмлено, якщо напруга в ній 220 В, запобіжник розрахований на 10 А і ймовірность для кожного приладу бути ввімкненим становить 0,5.

10.3. Для контролю партії, що містить 1000 виробів, з неї роблять вибірку обсягом 50. Знайти ймовірність того, що у вибірці не буде бракованих деталей, якщо в цій партії 4 вироби браковані. Зіставити точне значення цієї ймовірності з наближеним, здобутим за формулою Пуассона.

10.4. Час відправлення міжміського автобуса рівномірно розподілений на часовому проміжку від 0.00 до 20.00. Визначити ймовірність того, що пасажир, який прибув на станцію о 16.00, встигне на автобус.

10.5. Випадкова величина X розподілена показниково. Яка з подій більш ймовірна: випадкова величина набула значення, більшого чи меншого за своє математичне сподівання?

10.6. Визначити ймовірність того, що нормально розподілена величина потрапляє у проміжок $[\alpha;\beta)$, скориставшись таблицями функції $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

10.7. Розмір деталі — нормально розподілена величина з $MX = 10$. Деталь вважається стандартною, якщо її відхилення від математичного сподівання не перевищує 0,8. Побудувати графік залежності між значеннями σ і часткою (у відсотках) бракованих деталей.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Четверо студентів складають іспит з теорії ймовірностей. Ймовірність того, що перший із них складе іспит, дорівнює 0,9; для другого і третього ця ймовірність дорівнює 0,8, а для четвертого – 0,7. Побудувати закон розподілу величини X – числа студентів, котрі складуть зазначений іспит, і обчислити $M(X)$; $\sigma(x)$; As. Знайти моду.

2. Маємо три ящики. У першому з них міститься 6 стандартних і 4 браковані однотипні деталі, у другому – 8 стандартних і 2 браковані й у третьому – 5 стандартних і 5 бракованих деталей. Із кожного ящика навмання беруть по одній деталі. Обчислити $M(X)$, $\sigma(x)$, As для дискретної випадкової величини X – появи числа стандартних деталей серед трьох навмання взятих. Знайти Mo.

3. Для виготовлення деталей використовуються труби завдовжки 4, 5 і 6 м. При цьому половина труб поставляється завдовжки 6 м, а труб завдовжки 4 і 5 м надходить однакова кількість. Знайти закон розподілу кількості заготівок завдовжки 0,5 м, утворених із навмання взятої труби. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини. Розв'язати цю задачу для випадку, коли навмання беруться дві труби.

4. Ймовірність того, що деталь, яку виготовив верстат-автомат, належить до 1-го сорту, ставить 0,8. Робітник періодично перевіряє якість кожної виготовленої деталі, але щоразу не більше як чотирьох деталей. Якщо деталь 2-го сорту, то верстат зупиняють для регулювання. Скласти закон розподілу кількості перевірених деталей в одній серії спостережень. Знайти математичне сподівання та дисперсію цієї величини.

5. Визначити ціну лотерейного білета, за якої забезпечується прибуток від лотереї, що дорівнює третині суми, одержаної від реалізації білетів, якщо на кожні 100 з них установлено один виграш у 100 грн, два — по 20 грн і чотири — по 10 грн.

6. Існує гіпотеза, що випадкова величина X має таку функцію розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 0;\\ ax^2, \text{ якщо } 0<x\le 3;\\ 1, \text{ якщо } x>3.\end{cases}$$

У результаті чотирьох випробувань випадкова величина набувала значень, більших за 2. Чи відповідає цей результат висуненій гіпотезі, якщо рівень значущості дорівнює 0,005? Гіпотеза приймається, якщо ймовірність події більша за рівень значущості.

7. Брак при виготовленні деталей становить у середньому 5 %. Знайти ймовірність того, що серед 5 навмання взятих деталей: а) не виявиться жодної бракованої; б) буде дві браковані деталі.

8. На регістр ЕОМ надходить команда щодо округлення числа у більший чи менший бік до найближчого цілого числа. Знайти ймовірність того, що при обробці шести чисел половину буде округлено у більший , а половину – у менший бік.

9. Робітник обслуговує 6 однотипних верстатів. Ймовірність того, що верстат потрібно обслуговувати протягом часу Т, дорівнює . 3 1 Знайти ймовірність того, що за час Т: а) потрібно буде обслуговувати 3 верстати; б) кількість вимог на обслуговування за час Т буде від 2 до 5.
10. В електромережу ввімкнено 4 прилади, потужність кожного з них 660 Вт. Знайти ймовірність того, що мережу буде знеструмлено, якщо напруга в ній 220 В, запобіжник розрахований на 10 А і ймовірності для кожного приладу бути ввімкненим становить 0,5.

МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА
РОЗДІЛ 3. СТАТИСТИЧНІ РОЗПОДІЛИ ВИБІРКИ
Тема 11. Статистичний розподіл вибірки. Полігон і гістограма вибірки.

Теоретичні відомості

Кількісні ознаки елементів генеральної сукупності можуть бути одновимірними і багатовимірними, дискретними і неперервними.

Коли реалізується вибірка, кількісна ознака, наприклад X, набуває конкретних числових значень ($X = x_i$), які називають *варіантою*.

Зростаючий числовий ряд варіант називають *варіаційним*.

Кожна варіанта вибірки може бути спостереженою n_i раз ($n_i \geq 1$), число n_i називають *частотою варіанти* x_i.

При цьому $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, де k — кількість варіант, що різняться числовим значенням; n — обсяг вибірки.

Відношення частоти n_i варіанти x_i до обсягу вибірки n називають її *відносною частотою* і позначають через W_i , тобто $W_i = \frac{n_i}{n}$.

Для кожної вибірки виконується рівність $\sum_{i=1}^{k} W_i = 1$.

Перелік варіант варіаційного ряду і відповідних їм частот, або відносних частот, називають *дискретним статистичним розподілом вибірки*.

Дискретний статистичний розподіл вибірки можна подати емпіричною функцією $F^*(x)$.

Емпірична функція $F^*(x)$ *та її властивості*. Функція аргументу x, що визначає відносну частоту події $X < x$, тобто

$$F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n},$$

називається *емпіричною*, або *комулятою*.

Тут n — обсяг вибірки;

n_x — кількість варіант статистичного розподілу вибірки, значення яких менше за фіксовану варіанту x.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. У цеху встановлено 5 верстатів. Протягом 25 днів реєструвалась кількість верстатів, які не працювали. Здобуто такі значення: 0, 1, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 4, 2, 0, 0, 2, 2, 3, 3, 1, 0, 1, 2, 1, 3, 5, 0. Побудувати статистичну функцію розподілу.

Розв'язання. На підставі вибіркових даних складемо статистичний ряд:

x_i	0	1	2	3	4	5
Частоти	5	7	7	4	1	1

Запишемо статистичну функцію розподілу, скориставшись формулою $F_n^*(x) = \sum_{x_i < x} \frac{n(x_i)}{n}$.

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ \frac{1}{5}, & \text{якщо } 0 < x \le 1; \\ \frac{12}{25}, & \text{якщо } 1 < x \le 2; \\ \frac{19}{25}, & \text{якщо } 2 < x \le 3; \\ \frac{23}{25}, & \text{якщо } 3 < x \le 4; \\ \frac{24}{25}, & \text{якщо } 4 < x \le 5; \\ 1, & \text{якщо } x > 5. \end{cases}$$

Приклад 2. Із генеральної сукупності зроблено вибірку обсягом $n = 32$. Здобуто такі реалізації випадкової величини: 2,2; 7,1; 6,3; 3,9; 5,9; 5,6; 5,6; 4,7; 7,9; 3,2; 6,1; 5,5; 6,4; 6,0; 6,9; 4,7; 6,4; 6,9; 6,7; 7,9; 4,2; 6,7; 6,0; 9,2; 5,5; 6,5; 3,5; 4,9; 7,2; 4,9; 8,9; 5,7. Скласти інтервальний ряд і побудувати гістограму. Запропонувати гіпотезу про вигляд $F(x)$ у сукупності.

Розв'язання. Для побудови інтервального ряду розбиваємо область реалізацій на 7 інтервалів з однаковими довжинами інтервалів: $\Delta x = \frac{\max\limits_i(x_i) - \min\limits_i(x_i)}{7}$; $\Delta x = \frac{9,2 - 2,2}{7} = 1$. Частоти кожного інтервалу знайдемо, визначивши для кожного значення інтервал. Якщо значення x_i потрапляє на межу, то збільшуємо на 1 частоту нижнього інтервалу.

Інтервал	2,2—3,2	3,2—4,2	4,2—5,2	5,2—6,2	6,2—7,2	7,2—8,2	8,2—9,2
Частота	2	3	4	9	10	2	2

Згідно зі знайденим рядом будуємо гістограму (рис. 4).

На підставі побудованої гістограми можна висунути гіпотезу про нормальний закон розподілу в сукупності.

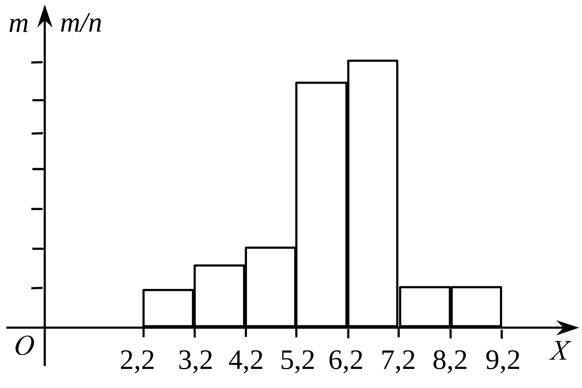


Рисунок 4

Задачі

11.1. Кількість деталей, потрібних для ремонту обладнання на тиждень, визначалася на підставі спостережень, здійснюваних протягом 20 тижнів. У результаті було здобуто такі значення: 0, 1, 1, 1, 0, 0, 2, 3, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 4, 0, 5, 2, 3. Побудувати статистичну функцію розподілу.

11.2. Для оцінювання ймовірності настання події було проведено 10 серій послідовних випробувань до першого успішного випробування. У результаті здобуто такі значення: 4, 3, 5, 3, 4, 4, 3, 5, 3, 4. Побудувати статистичну функцію розподілу і знайти $\max\limits_x \left| F(x) - F_n^*(x) \right|$, вважаючи, що справджується геометричний розподіл з $p = 0{,}25$.

11.3. Маємо дані про строк служби радіоламп (у тисячах годин): 0,45; 0,21; 0,14; 0,15; 1,52; 0,1; 0,52; 1,59; 3,38; 2,25; 0,8; 1,26; 2,31; 0,84; 3,72; 2,11; 1,02; 4,2; 2,53; 0,78; 2,92; 0,71; 4,7; 3,02; 1,58; 4,12; 2,59; 0,88; 0,96; 1,76; 1,93; 4,9; 2,82; 1,14; 5,7; 1,21; 1,47; 3,52; 0,36; 0,64. Скласти інтервальний ряд і побудувати гістограму. Висунути гіпотезу про закон розподілу в сукупності.

11.4. Із генеральної сукупності зроблено вибірку обсягом n= 30. Здобуто такі вибіркові значення: 4; 4,3; 5,68; 6,2; 5,64; 5,8; 4,25; 5,4; 5,3; 5,2; 4,55; 5,32; 6; 6,15; 4,56; 6,64; 6,5; 4,7; 6,8; 6,15; 5,6; 5,1; 4,2; 4,8; 6,9; 7; 4,9; 5; 5,25; 6,2. Скласти інтервальний ряд і побудувати гістограму. Висунути гіпотезу про закон розподілу в сукупності.

Тема 12. Вибіркові характеристики. Спрощення обчислень вибіркових характеристик.

Теоретичні відомості

Для вибіркової сукупності обчислюють числові характеристики — вибіркові випадкові функції: **вибіркову середню** $\overline{X}$, **вибіркову дисперсію** S^2, статистичні моменти розподілу тощо. Реалізації цих вибіркових функцій знаходять за формулами, вигляд яких залежить від того, в якій формі подано вибіркові дані. Якщо вибіркові дані не згруповано, то $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$, $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$. Якщо вибіркові дані зведено у статистичний ряд, то $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i n_i$, $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i-\overline{x}\right)^2 n_i$.

Якщо дані подаються інтервальним рядом, то перехід до статистичного ряду виконують, обчислюючи для кожного інтервалу його середину.

Крім середніх значень і вибіркових дисперсій для складових системи визначають статистичний кореляційний момент $K_{XY}^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_j-\overline{y}\right)n_{ij}$ і вибірковий коефіцієнт кореляції $r_{xy}=\frac{K_{xy}^*}{s_x\cdot s_y}$.

Приклади розв’язування задач

Приклад. За заданим статистичним розподілом вибірки

$X=x_i$	2,5	4,5	6,5	8,5	10,5
n_i	10	20	30	30	10

потрібно:

1) обчислити $\overline{x}_\text{В}$, $D_\text{В}$, $\sigma_\text{В}$;

2) знайти Mo*, Me*;

3) обчислити R, V.

Розв’язання. Оскільки $n=\sum n_i=100$, то дістанемо:

$$\overline{x}_\text{В}=\frac{\sum x_i n_i}{n}=\frac{2,5\cdot10+4,5\cdot20+6,5\cdot30+8,5\cdot30+10,5\cdot10}{100}=6,7;$$

$$\overline{x}_\text{В}=6,7.$$

Для обчислення $D_\text{В}$ визначається

$$\frac{\sum x_i^2 n_i}{n}=\frac{(2,5)^2\cdot10+(4,5)^2\cdot20+(6,5)^2\cdot30+(8,5)^2\cdot30+(10,5)^2\cdot10}{100}=50,05.$$

Тоді

$$D_\text{В}=\frac{\sum x_i^2 n_i}{n}-(\overline{x}_\text{В})^2=50,05-(6,7)^2=50,05-44,89=5,16.$$

$$D_\text{В}=5,16.$$

$$\sigma_{\text{В}} = \sqrt{D_{\text{В}}} = \sqrt{5{,}16} \approx 2{,}27.$$

$$\sigma_{\text{В}} = 2{,}27.$$

$$\text{Mo}^* = 6{,}5;\ 8{,}5.$$

Отже, наведений статистичний розподіл вибірки буде двомодальним. $\text{Me}^* = 6{,}5$, оскільки варіанта $x = 6{,}5$ поділяє варіаційний ряд 2,5; 4,5; **6,5**; 8,5; 10,5 на дві частини: 2,5; 4,5 і 8,5; 10,5, які мають однакову кількість варіант.

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 10{,}5 - 2{,}5 = 8.$$

$$V = \frac{\sigma_{\text{В}}}{\overline{x}_{\text{В}}} 100\% = \frac{2{,}27}{6{,}7} 100\% = 33{,}88\%.$$

Задачі

12.1. Для оцінювання ймовірності настання події було проведено 10 серій послідовних випробувань до першого успішного випробування. У результаті здобуто такі значення: 4, 3, 5, 3, 4, 4, 3, 5, 3, 4. Побудувати статистичну функцію розподілу і знайти $\max\limits_x \left| F(x) - F_n^*(x) \right|$, вважаючи, що справджується геометричний розподіл з p = 0,25. Знайти $\overline{x}$ і s^2, а також MX і DX для відповідного геометричного розподілу.

12.2. У вимірювальному приладі установлено 5 однотипних опорів. Під час експлуатації 15 приладів протягом року кількість опорів, які довелося замінити, була такою: 1, 3, 2, 0, 4, 1, 5, 5, 5, 4, 3, 4, 2, 1, 2. Побудувати статистичну функцію розподілу. Знайти $\max\limits_x \left| F(x) - F_n^*(x) \right|$, вважаючи, що кількість замінених опорів має розподіл Пуассона з $a = 3$. Знайти вибіркові середню величину та дисперсію і зіставити їхні значення з числовими характеристиками відповідного розподілу Пуассона.

12.3. Для контролю якості продукції, що належить певній сукупності, було зроблено серію вибірок обсягом n = 20. У результаті 10 серій дістали такі значення кількості бракованих деталей: 1, 3, 2, 1, 4, 3, 1, 1, 2, 1. Побудувати статистичну функцію розподілу і знайти $\max\limits_x \left| F(x) - F_n^*(x) \right|$, наблизивши гіпергеометричний розподіл розподілом Пуассона з $a = 2$. Знайти $\overline{x}$ і s^2, зіставивши їхні значення зі значенням a.

12.4. У результаті свердління отворів тим самим свердлом та вимірювання діаметрів дістали такі дані, у мм: 40,25; 40,29; 40,46; 40,33; 40,37; 40,27; 40,39; 40,34; 40,33; 40,35; 40,38; 40,32; 40,28; 40,41; 40,45; 40,39; 40,29;40,3; 40,44; 40,37; 40,41; 40,33; 40,35; 40,35; 40,35; 40, 40; 40, 40; 40,3; 40,28; 40,34; 40,45; 40,44. Скласти інтервальний ряд і побудувати гістограму. Висунути гіпотезу про закон розподілу сукупності. Знайти $\overline{x}$ і s^2.

12.5. Виконавши вимірювання межі текучості X і межі міцності Y 30 марок сталі, дістали такі результати:

X	154	133	58	145	94	113	74	121	119	112	85
Y	178	164	75	161	107	141	94	127	138	125	97
X	41	96	45	99	51	101	167	87	88	83	106
Y	74	113	89	109	95	114	207	101	139	98	111
X	92	85	112	98	103	99	104	107			
Y	104	103	118	102	108	119	128	118			

Знайти числові характеристики вибірки.

РОЗДІЛ 4. СТАТИСТИЧНІ ОЦІНКИ. СТАТИСТИЧНІ ГІПОТЕЗИ

Тема 13. Точкові статистичні оцінки параметрів розподілу. Оцінки мінімальної дисперсії.

Теоретичні відомості

Оцінка параметра розподілу сукупності θ у загальному випадку є випадковою величиною, яка визначається за даними вибірки і використовується замість невідомого значення параметра, який потрібно оцінити. Статистична оцінка θ^*, яка визначається одним числом, точкою, називається *точковою*.

Оцінки параметрів розподілу знаходять *методами максимальної правдоподібності* і *моментів.*

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. За методом моментів знайти оцінку параметра p геометричного розподілу за даними вибірки обсягом n.

Розв'язання. Геометричний закон розподілу визначається формулою: $P(X=m)=p(1-p)^{m-1}$, $m=1,2,...$ Оскільки потрібно знайти оцінку одного параметра, зрівнюємо теоретичні і статистичні початкові моменти першого порядку:

$$\nu_1 = MX = \frac{1}{p};\ \nu_1^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x};\ \frac{1}{p} = \bar{x};\ \hat{p} = \frac{1}{\bar{x}}.$$

Приклад. Граничне навантаження на сталевий болт x_i, що вимірювалось в лабораторних умовах, задано як інтервальний статистичний розподіл:

x_i, км/мм^2	4,5—5,5	5,5—6,5	6,5—7,5	7,5—8,5	8,5—9,5	9,5—10,5	10,5—11,5	11,5—12,5	12,5—13,5	13,5—14,5
n_i	40	32	28	24	20	18	16	12	8	4

Визначити точкові незміщені статистичні оцінки для $\bar{X}_\Gamma = M(x)$, D_Γ.

Розв'язання. Для визначення точкових незміщених статистичних оцінок $\bar{x}_\text{В}, S^2$ перейдемо від інтервального статистичного розподілу до дискретного, який набирає такого вигляду:

$x_i^* = x_{i-1} + \frac{h}{2}$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n_i	40	32	28	24	20	18	16	12	8	4

Обчислимо $\bar{x}_\text{В}$: $n = \sum n_i = 202$,

$$\bar{x}_\text{В} = \frac{\sum x_i^* n_i}{n} = \frac{5\cdot 40 + 6\cdot 32 + 7\cdot 28 + 8\cdot 24 + 9\cdot 20 + 10\cdot 18 +}{202}$$

$$\frac{+11\cdot 16 + 12\cdot 12 + 13\cdot 8 + 14\cdot 4}{202} = \frac{1620}{202} = 8{,}02 \text{ кг/мм}^2.$$

Отже, точкова незміщена статистична оцінка для $\overline{X}_{\Gamma} = M(x)$, $\overline{x}_{\text{В}} = 8,02$ кг/мм^2.

Для визначення S^2 обчислимо $D_{\text{В}}$:

$$\frac{\sum\left(x_i^*\right)^2 n_i}{n} = \frac{(5)^2\cdot 40 + (6)^2\cdot 32 + (7)^2\cdot 28 + (8)^2\cdot 24 + (9)^2\cdot 20 +}{202}$$

$$\frac{+(10)^2\cdot 18 + (11)^2\cdot 16 + (12)^2\cdot 12 + (13)^2\cdot 8 + (14)^2\cdot 4}{202} = \frac{14280}{202} \approx 70,69.$$

$$D_{\text{В}} = \frac{\sum\left(x_i^*\right)^2 n_i}{n} - \left(\overline{x}_{\text{В}}\right)^2 = 70,69 - (8,02)^2 = 70,69 - 64,32 \approx 6,37 \text{ кг/мм}^2.$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{В}} = \frac{202}{202-1}\cdot 6,37 = \frac{202}{201}\cdot 6,37 \approx 6,4.$$

Звідси точкова незміщена статистична оцінка для D_{Γ} є $S^2 = 6,4$ кг/мм^2.

Задачі

13.1. Із нормально розподіленої сукупності з $DX = \sigma^2$ зроблено вибірку обсягом *n*. Знайти оцінку для *MX*. Перевірити її на незміщеність, ефективність та обґрунтованість.

13.2. Із нормально розподіленої сукупності з *MX=a* зроблено вибірку обсягом *n*. Знайти оцінку для *DX*. Перевірити її на незміщеність, ефективність та обґрунтованість.

13.3. Із сукупності, розподіл у якій задається щільністю $f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}(\ )} (x > 0)$, зроблено вибірку обсягом *n*. Знайти оцінку для μ і перевірити її на незміщеність, ефективність та обґрунтованість (значення σ^2 відоме).

13.4. Із сукупності зі щільністю:

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-a(x-\mu)^2}, \text{ якщо } x \geq \mu, \\ 0, \text{ якщо } x < \mu \end{cases}$$

зроблено вибірку обсягом *n*. Знайти оцінки для a і μ.

13.5. Із сукупності зі щільністю:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{\ln x - \mu}{2\sigma^2}\right)^2}, \text{ якщо } x > 0, \\ 0, \text{ якщо } x \leq 0 \end{cases}$$

зроблено вибірку обсягом *n*. Знайти оцінки для μ і σ^2.

Тема 14. Інтервальні оцінки параметрів розподілу. Довірчі інтервали для мат. сподівання. Довірчі інтервали для дисперсії.

Теоретичні відомості

Інтервальна оцінка визначається двома точками – початком і кінцем інтервалу. Інтервал $\left[\theta^* - \delta;\ \theta^* + \delta\right]$ називають *довірчим*, якщо він містить невідомий параметр θ із заданою надійністю $P\left(\left|\theta^* - \theta\right| < \delta\right) = \gamma$.

Для оцінки математичного сподівання a-нормально розподіленої кількісної ознаки Х за вибірковою середньою $\overline{x}_B$; якщо відомо середнє квадратичне відхилення σ-генеральної сукупності, служить довірчий інтервал:

$$\overline{x}_B - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_B + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

де $t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \delta$ – точність оцінки; n – об'єм вибірки; t – аргумент функції Лапласа, для якого $\Phi(t)=\dfrac{\gamma}{2}$.

Якщо σ – невідоме і об'єм вибірки n>30, то використовують подвійну нерівність:

$$\overline{x}_B - t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_B + t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}},$$

де S – виправлене середнє квадратичне відхилення, t – знаходять за таблицею для заданих n і γ.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Визначити мінімальний обсяг вибірки n для того, щоб із надійністю $\gamma = 0{,}98$ можна було дістати оцінку математичного сподівання нормально розподіленої сукупності $\varepsilon = 0{,}2$, якщо середнє квадратичне відхилення в генеральній сукупності $\sigma = 1{,}5$ і оцінка знаходиться за допомогою вибіркової середньої величини.

Розв'язання. Скориставшись формулою $P\left(\left|\overline{x} - a\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\beta\right) = \gamma,$ дістаємо $\beta = \Phi^{-1}\left(\dfrac{\gamma}{2}\right).$ Знайдемо n із формули $\varepsilon = \dfrac{\beta\sigma}{\sqrt{n}},\ n = \dfrac{\beta^2\sigma^2}{\varepsilon^2}.$ За таблицями функції Лапласа $\beta = \Phi^{-1}\left(0{,}49\right) = 2{,}33,$ Отже, $n = \left(\dfrac{2{,}33 \cdot 1{,}5}{0{,}2}\right)^2 \approx 306.$

Приклад 2. Маємо такі дані про розміри основних фондів (у млн грн.) на 30-ти випадково вибраних підприємствах:

4,2; 2,4; 4,9; 6,7; 4,5; 2,7; 3,9; 2,1; 5,8; 4,0;
2,8; 7,8; 4,4; 6,6; 2,0; 6,2; 7,0; 8,1; 0,7,; 6,8;
9,4; 7,6; 6,3; 8,8; 6,5; 1,4; 4,6; 2,0; 7,2; 9,1.

Побудувати інтервальний статистичний розподіл із довжиною кроку h = 2 млн грн.

З надійністю $\gamma = 0{,}999$ знайти довірчий інтервал для $\overline{X}_{\text{Г}}$, якщо $\sigma_{\text{Г}} = 5$ млн грн.

Розв'язання. Інтервальний статистичний розподіл буде таким:

h = 2 млн грн.	2—4	4—6	6—8	8—10
n_i	9	7	10	4

Для визначення $\overline{x}_{\text{В}}$ необхідно побудувати дискретний статистичний розподіл, що має такий вигляд:

x_i^*	3	5	7	9
n_i	9	7	10	4

$n = \sum n_i = 30$.

Тоді

$$\overline{x}_{\text{В}} = \frac{\sum x_i^* n_i}{n} = \frac{3\cdot 9 + 5\cdot 7 + 7\cdot 10 + 9\cdot 4}{30} = \frac{27+35+70+36}{30} =$$

$$= \frac{168}{30} = 5{,}6 \text{ млн грн.}$$

Для побудови довірчого інтервалу із заданою надійністю $\gamma = 0{,}999$ необхідно знайти x:

$$\Phi(x) = 0{,}5\gamma = 0{,}5\cdot 0{,}999 = 0{,}4995 \to x \approx 3{,}4.$$

Обчислюємо кінці інтервалу:

$$\overline{x}_{\text{В}} - \frac{x\sigma_{\text{Г}}}{\sqrt{n}} = 5{,}6 - \frac{3{,}4\cdot 5}{\sqrt{30}} = 5{,}6 - \frac{3{,}4\cdot 5}{5{,}5} = 5{,}6 - 3{,}1 = 2{,}5 \text{ млн грн.}$$

$$\overline{x}_{\text{В}} + \frac{x\sigma_{\text{Г}}}{\sqrt{n}} = 5{,}6 + \frac{3{,}4\cdot 5}{\sqrt{30}} = 5{,}6 + \frac{3{,}4\cdot 5}{5{,}5} = 5{,}6 + 3{,}1 = 8{,}7 \text{ млн грн.}$$

Отже, довірчий інтервал для $\overline{X}_{\text{Г}}$ буде $2{,}5 < \overline{X}_{\text{Г}} < 8{,}7$.

Приклад. Якого значення має набувати надійність оцінки γ, щоб за обсягу вибірки n = 100 похибка її не перевищувала 0,01 при $\sigma_{\text{Г}} = 5$.

Розв'язання. Позначимо похибку вибірки

$$\frac{x\cdot\sigma_{\text{Г}}}{\sqrt{n}} = \varepsilon \to x = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma_{\text{Г}}} = \frac{0{,}01\sqrt{100}}{5} = \frac{0{,}01\cdot 10}{5} = 0{,}02.$$

Далі маємо:

$$P\left(\left|\frac{\overline{x}_{\text{В}} - a}{\frac{\sigma_{\text{Г}}}{\sqrt{n}}}\right| < x\right) = 2\Phi(x) = 2\Phi(0{,}02) = 2\cdot 0{,}008 = 0{,}016.$$

Як бачимо, надійність мала.

Задачі

14.1. Під час перевірки 400 лампочок середній строк їх горіння становив 1220 год. Оцінити з надійністю $\gamma = 0{,}95$ математичне сподівання тривалості горіння, якщо $\sigma = 35$ год і в сукупності виконується нормальний закон розподілу.

14.2. На основі 100 спостережень було визначено, що в середньому для виробництва деталі потрібно 5,5 с, а $s^2 = 2{,}89$. Вважаючи, що тривалість виготовлення деталі розподілена нормально, знайти інтервальні оцінки для a і σ^2 з надійністю 0,96 і 0,98 відповідно.

14.3. Систематичні помилки вимірювального приладу дорівнюють нулю, а випадкові розподілені нормально з $\sigma = 20$ м. Потрібно, щоб абсолютне значення різниці між здобутим результатом і справжнім її значенням не перевищувало 10 м. Визначити, з якою ймовірністю ця вимога виконуватиметься, якщо береться середнє арифметичне n вимірювань і n = 4, 9, 16, 25.

14.4. У результаті вимірювання максимальної ємності 20 конденсаторів дістали такі числові характеристики: $\overline{x} = 4{,}47$, $s^2 = 0{,}0121$.Порівняти точність оцінки математичного сподівання a за допомогою $\overline{x}$ з надійністю $\gamma = 0{,}95$.

14.5. Вибіркове дослідження прибутків підприємців за місяць дало результати:

Прибуток (тис.гр.)(x_i)	1	3	4	5	6	7
Частота (n_i)	1	1	2	3	2	1

Побудувати довірчий інтервал для математичного сподівання, а припускаючи, що генеральна сукупність X розподілена нормально з надійністю $\gamma = 0{,}95$, розрахувати інтервал для σ.

14.6. Знайти з надійністю 0,95 довірчий інтервал оцінки математичного сподівання a-нормально розподіленої ознаки X генеральної сукупності, якщо відомі вибіркова середня $\overline{x}_B$, об’єм вибірки n та середнє квадратичне відхилення σ генеральної сукупності:

а) $\overline{x}_B$ =14, n=25, σ=5;

б) $\overline{x}_B$ =2000, n=1600, σ=40.

Тема 15. Статистичні критерії. Перевірка правдивості статистичних гіпотез.

Теоретичні відомості

Статистична гіпотеза **—** гіпотеза, яка стосується виду або параметрів розподілу випадкової величини і яку можна перевірити на підставі результатів спостереження у випадковій вибірці. Помилки, яких можна припуститися, при перевірці гипотезбувають *двох родів*.

Для перевірки правильності нульової гіпотези H_0 задається так званий *рівень значущості* α.

Алгоритм перевірки правильності H_0:

1. Сформулювати H_0 й одночасно альтернативну гіпотезу H_α.

2. Вибрати статистичний критерій, який відповідав би сформульованій нульовій гіпотезі.

3. Залежно від змісту нульової та альтернативної гіпотез будується правобічна, лівобічна або двобічна критична область, а саме:

нехай $H_0 : \bar{x}_r = a$, тоді, якщо

$H_\alpha : \bar{x}_r > a$, то вибирається правобічна критична область, якщо

$H_\alpha : \bar{x}_r < a$, то вибирається лівобічна критична область і коли

$H_\alpha : \bar{x}_r \neq a$, то вибирається двобічна критична область.

4. Для побудови критичної області (лівобічної, правобічної чи двобічної) необхідно знайти критичні точки. За вибраним статистичним критерієм та рівнем значущості α знаходяться критичні точки.

5. За результатами вибірки обчислюється спостережуване значення критерію $K^*_{\text{сп}}$.

6. Відхиляють чи приймають нульову гіпотезу на підставі таких міркувань:

у разі, коли $K^* \in \bar{A}$, а це є малоймовірною випадковою подією, $P(K^* \in \bar{A}) = \alpha$ і, незважаючи на це, вона відбулася, то в цьому разі H_0 відхиляється:

для лівобічної критичної області

$$P(K^*_{\text{сп}} < K_{\text{кр}}) = \alpha;$$

для правобічної критичної області

$$P(K^*_{\text{сп}} > K_{\text{кр}}) = \alpha;$$

для двобічної критичної області

$$P(K^*_{\text{сп}} < K'_{\text{кр}}) + P(K^*_{\text{сп}} > K''_{\text{кр}}) = \alpha$$

або

$$P(K^*_{\text{сп}} < K'_{\text{кр}}) = P(K^*_{\text{сп}} > K''_{\text{кр}}) = \frac{\alpha}{2},$$

ураховуючи ту обставину, що критичні точки $K'_{\text{кр}}$ і $K''_{\text{кр}}$ симетрично розташовані відносно нуля.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Ознаки *X* і *Y* двох генеральних сукупностей, елементами яких є однотипні заклепки, мають нормальний закон розподілу зі значеннями дисперсій $D_x = 2{,}2$ мм^2, $D_y = 2{,}8$ мм^2.

При реалізації двох вибірок із генеральних сукупностей дістали статистичні розподіли:

y_i	9,7	9,8	9,9	10	10,1	10,2
n'_i	2	3	5	4	1	1

x_j	8,9	9,2	9,5	9,8	10,1
n''_j	1	4	5	6	4

При рівні значущості $\alpha = 0{,}001$ перевірити правильність нульової гіпотези $H_0 : M(X) = M(Y)$, якщо альтернативна гіпотеза $H_\alpha : M(X) < M(Y)$.

Розв’язання. Ураховуючи, що

$$n' = \sum n'_i = 15; \quad n'' = \sum n''_j = 20 \text{, обчислимо}$$

$$\overline{x}_{\text{В}} = \frac{\sum x_j n''_j}{n''} = \frac{8{,}9\cdot 1 + 9{,}2\cdot 4 + 9{,}5\cdot 5 + 9{,}8\cdot 6 + 10{,}1\cdot 4}{20} =$$

$$= \frac{8{,}9 + 36{,}8 + 47{,}5 + 58{,}8 + 40{,}4}{20} = \frac{192{,}4}{20} = 9{,}62 \text{ мм.}$$

$$\overline{y}_{\text{В}} = \frac{\sum y_i n'_i}{n'} = \frac{9{,}7\cdot 2 + 9{,}8\cdot 3 + 9{,}9\cdot 5 + 10\cdot 4 + 10{,}1\cdot 1 + 10{,}2\cdot 1}{15} =$$

$$= \frac{19{,}4 + 29{,}4 + 49{,}5 + 40 + 10{,}1 + 10{,}2}{15} = \frac{158{,}6}{15} \approx 10{,}57 \text{ мм.}$$

При альтернативній гіпотезі $H_\alpha : M(X) < M(Y)$ будуємо лівобічну критичну область, критичну точку для якої знаходимо з рівності

$$\Phi(z_{\text{кр}}) = -\frac{1-2\alpha}{2} = -\frac{1-2\cdot 0{,}001}{2} = -\frac{0{,}998}{2} = -0{,}499 \rightarrow z_{\text{кр}} = -3{,}2.$$

Лівобічна критична область зображена на рис. 5.

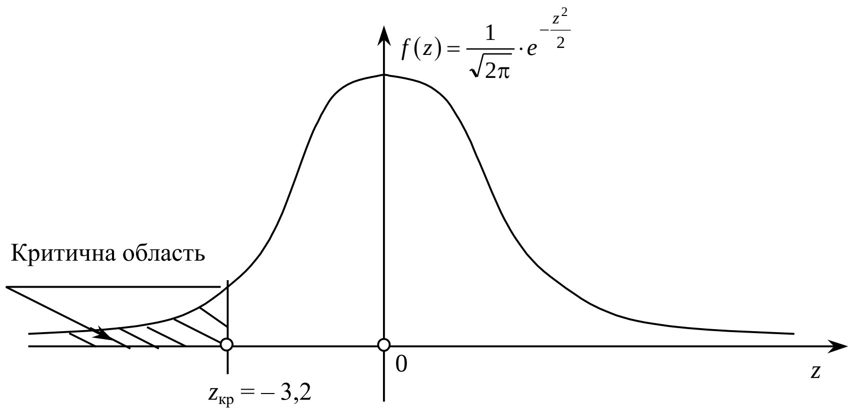


Рисунок 5

Обчислюємо спостережуване значення критерію

$$Z^* = \frac{\overline{x}_{\text{В}} - \overline{y}_{\text{В}}}{\sqrt{\frac{D_x}{n''} + \frac{D_y}{n'}}} = \frac{9,62 - 10,57}{\sqrt{\frac{2,2}{20} + \frac{2,8}{15}}} = -\frac{0,95}{\sqrt{0,11 + 0,19}}$$

$$= -\frac{0,95}{\sqrt{0,3}} = -\frac{0,95}{0,55} = -1,73.$$

Висновок. Оскільки $Z^* \in [-3,2; \infty[$, то відсутні підстави для відхилення $H_0 : M(X) = M(Y)$.

Приклад 2. За заданими статистичними розподілами вибірок, які реалізовано з генеральних сукупностей, ознаки яких X і Y є незалежними і мають нормальний закон розподілу,

y_i	1,2	2,2	3,2	4,2	5,2
n'_i	1	2	4	2	3

x_j	0,8	1,6	2,4	3,2	4
n''_j	2	6	1	1	2

при рівні значущості α = 0,01 перевірити правильність нульової гіпотези $H_0 : D_x = D_y$, якщо альтернативна гіпотеза $H_\alpha : D_x > D_y$.

Розв'язання. Обчислимо значення S_x^2, S_y^2:

$$\overline{y} = \frac{\sum y_i n'_i}{n'} = \frac{1,2 \cdot 1 + 2,2 \cdot 2 + 3,2 \cdot 4 + 4,2 \cdot 2 + 5,2 \cdot 3}{12} =$$

$$= \frac{1,2 + 4,4 + 12,8 + 8,4 + 15,6}{12} = \frac{42,4}{12} \approx 3,53;$$

$$\frac{\sum y_i^2 n'_i}{n'} = \frac{1,2^2 \cdot 1 + 2,2^2 \cdot 2 + 3,2^2 \cdot 4 + 4,2^2 \cdot 2 + 5,2^2 \cdot 3}{12} = \frac{168,48}{12} = 14,04;$$

$$D_{\text{В}} = \frac{\sum y_i^2 n'_i}{n'} - (\overline{y})^2 = 14,04 - (3,53)^2 = 14,04 - 12,4609 = 1,579;$$

$$S_y^2 = \frac{n'}{n'-1} D_{\text{В}} = \frac{12}{12-1} \cdot 1,5191 = 1,723;$$

$$\overline{x} = \frac{\sum x_j n''_j}{n''} = \frac{0,8 \cdot 2 + 1,6 \cdot 6 + 2,4 \cdot 1 + 3,2 \cdot 1 + 4 \cdot 2}{12} =$$

$$= \frac{1,6 + 9,6 + 2,4 + 3,2 + 8}{12} = \frac{24,8}{12} = 2,067;$$

$$\frac{\sum x_j^2 n''_j}{n''} = \frac{0,8^2 \cdot 2 + 1,6^2 \cdot 6 + 2,4^2 \cdot 1 + 3,2^2 \cdot 1 + 4^2 \cdot 2}{12} = \frac{64,64}{12} = 5,39.$$

$$D_{\text{В}} = \frac{\sum x_j^2 n''_j}{n''} - (\overline{x})^2 = 5,39 - (2,067)^2 = 5,39 - 4,272489 = 1,1175;$$

$$S_x^2=\frac{n''}{n''-1}D_{\text{В}}=\frac{12}{12-1}\cdot 1{,}1175\approx 1{,}22.$$

Обчислимо спостережуване значення критерію

$$F^*=\frac{S_\delta^2}{S_m^2}=\frac{1{,}723}{1{,}22}=1{,}41.$$

Для альтернативної гіпотези $H_\alpha: D_x > D_y$ будуємо правобічну критичну область. Знайдемо за таблицею (додаток 7) критичну точку

$$F_{\text{кр}}(\alpha=0{,}01,\ k_1=12-1=11,\ k_2=12-1=11)=$$
$$=F_{\text{кр}}(0{,}01;\ k_1=11;\ k_2=11)=4{,}4.$$

Критична область зображена на рис. 6.

$$f(F)=\frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{\frac{k_2}{2}}(F)^{\frac{k_2}{2}-1}\left(1+\frac{k_2}{k_1}F\right)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}$$

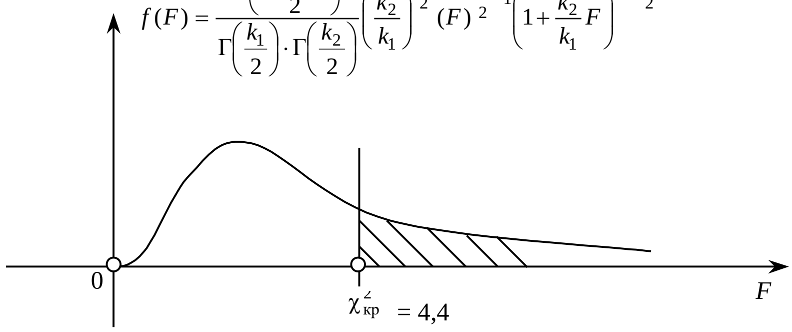


Рисунок 6

Висновок. Оскільки $F^*\in[0;\,4{,}4]$, нульова гіпотеза $H_0: D_x = D_y$ є правильною.

Задачі

15.1. Із нормально розподіленої сукупності з невідомим математичним сподіванням зроблено вибірку обсягом *n*. Побудувати критерій для перевірки гіпотези $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ за альтернативної гіпотези $H_1:\sigma^2>0$. Знайти закон розподілу для випадкової величини — аргументу λ.

15.2. Із показниково розподіленої сукупності зроблено вибірку обсягом *n*. Побудувати критерій для перевірки гіпотези $H_0: a=a_0$ за альтернативної гіпотези $H_1: a>0$. Знайти закон розподілу для випадкової величини — аргументу λ.

15.3. Розробляючи норми виробітку, на підприємстві провели 26 вимірювань продуктивності праці робітників, які виконували певну операцію. При цьому середня продуктивність праці $\overline{x}=5{,}2$, а $\sigma=0{,}4$. Перевірити гіпотезу, що в разі масового випуску цієї продукції середня продуктивність праці становитиме 5,1 за рівня значущості $\alpha=0{,}01$.

15.4. Вимірювання деталей, які вироблені на тому самому верстаті, показали, що відхилення характеристики від номіналу в середньому становить 18 км і є підстави вважати, що вони розподілені за нормальним законом. З метою зменшення відхилень застосовано додаткову операцію, а потім зроблено вибірку обсягом $n = 20$. Згідно з результатами обстеження середнє відхилення становить 14 мкм, а $s = 4,5$ мкм. Перевірити за рівня значущості $\alpha = 0,05$ гіпотезу про те, що додаткова операція не істотно впливає на розмір відхилення.

15.5. На робочому місці 9 раз фіксується тривалість виконання робітником певної операції. Числові характеристики вибірки такі: $\overline{x} = 83$ хв; $s^2 = 4,04$ хв^2. Перевірити, чи істотне відхилення вибіркової дисперсії від дисперсії $\sigma^2 = 3$ хв^2, значення якої здобуто на підставі багатьох вимірювань тривалості цієї операції. Рівень значущості $\alpha = 0,05$.

Задачі для самостійного розв'язування

1. З метою маркетингового дослідження в одному з відділів магазину щодня фіксувались продажі товару А. За 25 робочих днів отримано дані (в шт.): 3, 1, 3, 3, 4, 3, 5, 4, 3, 3, 3, 1, 4, 3, 5, 3, 1, 4, 4, 3, 5, 1, 3, 4, 5. Потрібно: а) записати варіаційний та статистичний ряди для даної вибірки; б) знайти емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік; в) побудувати полігон відносних частот.

2. З метою дослідження впливу телевізійної реклами певного товару було опитано 100 осіб віком від 10 до 40 років. Виявилось, що з товаром ознайомлені:

Вікова категорія	(10,15)	(15,20)	(20,25)	(25,30)	(30,35)	(35,40)
К-сть осіб	12	25	30	18	10	5

Потрібно побудувати: а) гістограму частот; б) гістограму відносних частот за даним розподілом вибірки. 3. У відділі технічного контролю зафіксували позитивні відхилення і x_i (в мкм) від номінального розміру деталі серед n=20 штук бракованих:

x_i	2	3	4	5	6
n_i	2	4	9	3	2

Потрібно знайти: а) вибіркову середню $\overline{x}_в$; б) вибіркову дисперсію D_B ; в) вибіркове середнє квадратичне відхилення σ_B ; г) виправлену вибіркову дисперсію S^2 за даним розподілом вибірки.

5. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки X генеральної сукупності, якщо відомі генеральне середнє квадратичне відхилення σ , вибіркова середня $\overline{x}_в$ і об'єм вибірки n :

$\gamma = 0{,}99; \sigma = 4; \overline{x}_в = 13{,}6; n = 144$.

6. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки X генеральної сукупності, якщо відомі виправлене середнє квадратичне відхилення S , вибіркова середня 6. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки X генеральної сукупності, якщо відомі виправлене середнє квадратичне відхилення S , вибіркова середня $\overline{x}_в$ і об'єм вибірки n :

$\gamma = 0{,}95; \sigma = 4; \overline{x}_в = 74{,}2; n = 25$.

ДОДАТКИ

Додаток 1

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ГАУССА $\varphi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0.1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	3521	3503	3485	3467	3478	3429	3410	3391	3372	3352
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2813	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0.2420	2396	2371	2347	2323	2293	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1691	1669	1647	1646	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1107
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0978	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2.0	0.0540	0525	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0279	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2.5	0175	0171	0164	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0118	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3.0	0040	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0014	0014	0013	0013	0013
3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3.5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3.6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3.7	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003	0003
3.8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	000

Додаток 2

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ЛАПЛАСА $\Phi(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,26	0,1026	0,52	0,1985	0,78	0,2823
0,01	0,0040	0,27	0,1064	0,53	0,2019	0,79	0,2852
0,02	0,0080	0,28	0,1103	0,54	0,2054	0,80	0,2881
0,03	0,0120	0,29	0,1141	0,55	0,2088	0,81	0,2910
0,04	0,0160	0,30	0,1179	0,56	0,2123	0,820	0,2939
0,05	0,0199	0,31	0,1217	0,57	0,2157	0,83	0,2967
0,06	0,0239	0,32	0,1255	0,58	0,2190	0,84	0,2995
0,07	0,0279	0,33	0,1293	0,59	0,2224	0,85	0,3023
0,08	0,0319	0,34	0,1331	0,60	0,2257	0,86	0,3051
0,09	0,0359	0,35	0,1368	0,61	0,2291	0,87	0,3078
0,10	0,0398	0,36	0,1406	0,62	0,2324	0,88	0,3106
0,11	0,0438	0,37	0,1443	0,63	0,2357	0,89	0,3133
0,12	0,0478	0,38	0,1480	0,64	0,2389	0,90	0,3159
0,13	0,0517	0,39	0,1617	0,65	0,2422	0,91	0,3186
0,14	0,8557	0,40	0,1564	0,66	0,2454	0,92	0,3212
0,15	0,0596	0,41	0,1691	0,67	0,2486	0,93	0,3238
0,16	0,0636	0,42	0,1628	0,68	0,2517	0,94	0,3264
0,17	0,0675	0,43	0,1664	0,69	0,2549	0,95	0,3289
0,18	0,0714	0,44	0,1700	0,70	0,2580	0,96	0,3315
0,19	0,0753	0,45	0,1736	0,71	0,2611	0,97	0,3340
0,20	0,0793	0,46	0,1772	0,72	0,2642	0,98	0,3365
0,21	0,0832	0,47	0,1808	0,73	0,2673	0,99	0,3389
0,22	0,0871	0,48	0,1844	0,74	0,2703	1,00	0,3413
0,23	0,0910	0,49	0,1879	0,75	0,2734	1,01	0,3438
0,24	0,0948	0,50	0,1915	0,76	0,2764	1,02	0,3461
0,25	0,0987	0,51	0,1950	0,77	0,2794	1,03	0,3485

Продовження додатка 2

x	$Ф(x)$	x	$Ф(x)$	x	$Ф(x)$	x	$Ф(x)$
1,04	0,3508	1,33	0,4082	1,62	0,4474	1,91	0,4719
1,05	0,3531	1,34	0,4099	1,63	0,4484	1,92	0,4726
1,06	0,3554	1,35	0,4115	1,64	0,4495	1,93	0,4732
1,07	0,3577	1,36	0,4131	1,65	0,4505	1,94	0,4738
1,08	0,3599	1,37	0,4147	1,66	0,4515	1,95	0,4744
1,09	0,3621	1,38	0,4162	1,67	0,4525	1,96	0,4750
1,10	0,3643	1,39	0,4177	1,68	0,4535	1,97	0,4756
1,11	0,3665	1,40	0,4192	1,69	0,4545	1,98	0,4761
1,12	0,3686	1,41	0,4207	1,70	0,4554	1,99	0,4767
1,13	0,3708	1,42	0,4222	1,71	0,4564	2,00	0,4772
1,14	0,3729	1,43	0,4236	1,72	0,4573	2,02	0,4783
1,15	0,3749	1,44	0,4251	1,73	0,4582	2,04	0,4793
1,16	0,3770	1,45	0,4265	1,74	0,4591	2,06	0,4803
1,17	0,3790	1,46	0,4279	1,75	0,4599	2,08	0,4812
1,18	0,3810	1,47	0,4292	1,76	0,4608	2,10	0,4821
1,19	0,3830	1,48	0,4306	1,77	0,4616	2,12	0,4830
1,20	0,3849	1,49	0,4319	1,78	0,4625	2,14	0,4838
1,21	0,3869	1,50	0,4332	1,79	0,4633	2,16	0,4846
1,22	0,3883	1,51	0,4345	1,80	0,4641	2,18	0,4854
1,23	0,3907	1,52	0,4357	1,81	0,4649	2,20	0,4861
1,24	0,3925	1,53	0,4370	1,82	0,4656	2,22	0,4868
1,25	0,3944	1,54	0,4382	1,83	0,4664	2,24	0,4875
1,26	0,3962	1,55	0,4394	1,84	0,4671	2,26	0,4881
1,27	0,3980	1,56	0,4406	1,85	0,4678	2,28	0,4887
1,28	0,3997	1,57	0,4418	1,86	0,4686	2,30	0,4893
1,29	0,4015	1,58	0,4429	1,87	0,4693	2,32	0,4898
1,30	0,4032	1,59	0,4441	1,88	0,4699	2,34	0,4904
1,31	0,4049	1,60	0,4452	1,89	0,4706	2,36	0,4909
1,32	0,4066	1,61	0,4463	1,90	0,4713	2,38	0,4913

Закінчення додатка 2

x	$Ф(x)$	x	$Ф(x)$	x	$Ф(x)$	x	$Ф(x)$
2,40	0,4918	2,60	0,4953	2,80	0,4974	3,20	0,49931
2,42	0,4922	2,62	0,4956	2,82	0,4976	3,40	0,49966
2,44	0,4927	2,64	0,4959	2,84	0,4977	3,60	0,49984
2,46	0,4931	2,66	0,4961	2,86	0,4979	3,80	0,499928
2,48	0,4934	2,68	0,4963	2,90	0,4981	4,00	0,499968
2,50	0,4938	2,70	0,4965	2,92	0,4982	5,00	0,499997
2,52	0,4941	2,72	0,4967	2,94	0,4984		
2,54	0,4945	2,74	0,4969	2,96	0,49846		
2,56	0,4948	2,76	0,4971	2,98	0,49856		
2,58	0,4951	2,78	0,4973	3,00	0,49865	$x > 5$	0,5

Додаток 3

КРИТИЧНІ ТОЧКИ РОЗПОДІЛУ СТЬЮДЕНТА (*t*-РОЗПОДІЛУ)

Число ступенів свободи, k	Рівень значущості, α						
	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	3,08	6,31	12,7	31,82	63,66	127,32	636,62
2	1,89	2,92	4,30	6,97	9,93	14,09	31,60
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	7,45	12,94
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	5,60	8,61
5	1,48	2,02	2,57	3,37	4,03	4,77	6,86
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	4,32	5,96
7	1,42	1,90	2,36	3,00	3,50	4,03	5,41
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	3,83	5,04
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	3,69	4,78
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	3,58	4,59
11	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	3,50	4,44
12	1,36	1,78	2,18	2,68	3,05	3,43	4,32
13	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	3,37	4,22
14	1,34	1,76	2,14	2,62	2,98	3,33	4,14
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,29	4,07
16	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92	3,25	4,02
17	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	3,22	3,97
18	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88	3,20	3,92
19	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,17	3,88
20	1,33	1,73	2,09	2,53	2,85	3,15	3,85
21	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83	3,14	3,82
22	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82	3,12	3,79
23	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81	3,10	3,77
24	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80	3,09	3,75
25	1,32	1,71	2,06	2,48	2,79	3,08	3,73
26	1,32	1,71	2,06	2,48	2,78	3,07	3,71
27	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77	3,06	3,69
28	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76	3,05	3,67
29	1,31	1,70	2,04	2,46	2,76	3,04	3,66
30	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75	3,03	3,65
40	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70	2,97	3,55
60	1,30	1,67	2,00	2,39	2,66	2,91	3,46
120	1,29	1,66	1,98	2,36	2,62	2,86	3,37
∞	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58	2,81	3,29

Додаток 4

ЗНАЧЕННЯ ВЕЛИЧИНИ χ_1^2 ЗАЛЕЖНО ВІД ІМОВІРНОСТІ $P(\chi^2 > \chi_1^2)$

Число ступенів свободи, k	$P(\chi^2 > \chi_1^2)$							
	0,2	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	1,64	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9	9,5	10,83
2	3,22	4,6	6,0	7,8	9,2	11,6	12,4	13,8
3	4,64	6,3	7,8	9,8	11,3	12,8	14,6	16,3
4	6,0	7,8	9,5	11,7	13,3	14,9	16,9	18,5
5	7,3	9,2	11,1	13,4	15,1	16,3	18,9	20,5
6	8,6	10,6	12,6	15,0	16,8	18,6	20,7	22,5
7	9,8	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3	22,6	24,3
8	11,0	13,4	15,5	18,2	20,1	21,9	24,3	26,1
9	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9
10	13,4	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6
11	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3
12	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3	31,0	32,9
13	17,0	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5
14	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31,0	34,0	36,1
15	19,3	22,3	25,0	28,3	30,6	32,5	35,5	37,7
16	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	34,0	37,0	39,2
17	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	35,5	38,5	40,8
18	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	37,0	40,0	42,3
19	23,9	27,3	30,1	33,7	36,2	38,5	41,5	43,8
20	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	40,0	43,0	45,3
21	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	41,5	44,5	46,8
22	27,3	30,8	33,9	38,7	40,3	42,5	46,0	48,3
23	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	44,0	47,5	49,7
24	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	45,5	48,5	51,2
25	30,7	34,4	37,7	41,6	44,3	47,0	50,0	52,6
26	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	48,0	51,5	54,1
27	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	49,5	53,0	55,5
28	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	51,0	54,5	56,9
29	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	52,5	56,0	58,3
30	36,3	40,3	43,8	48,0	50,9	54,0	57,5	59,7

ЗНАЧЕННЯ ВЕЛИЧИНИ χ_2^2 ЗАЛЕЖНО ВІД ІМОВІРНОСТІ $P(\chi^2 > \chi_1^2)$

Число ступенів свободи, k	$P(\chi^2 > \chi_2^2)$							
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30
1	0,00016	0,0006	0,0039	0,016	0,064	0,148	0,455	1,07
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,66
4	0,30	0,43	0,71	1,06	1,65	2,19	3,36	4,9
5	0,55	0,76	1,14	1,61	2,34	3,0	4,35	6,1
6	0,87	1,13	1,63	2,20	3,07	3,83	5,35	7,2
7	1,24	1,56	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,4
8	1,65	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,5
9	2,09	2,563	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,8
11	3,1	3,6	4,6	5,6	7,0	8,1	10,3	12,9
12	3,6	4,2	5,2	6,3	7,8	9,0	11,3	14,0
13	4,1	4,8	5,9	7,0	8,6	9,9	12,3	15,1
14	4,7	5,4	6,6	7,8	9,5	10,8	13,3	16,2
15	5,2	6,0	7,3	8,5	10,3	11,7	14,3	17,3
16	5,8	6,6	8,0	9,3	11,2	12,6	15,3	18,4
17	6,4	7,3	8,7	10,1	12,0	13,5	16,3	19,5
18	7,0	7,9	9,4	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6
19	7,6	8,6	10,1	11,7	13,7	15,4	18,3	21,7
20	8,3	9,2	10,9	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8
21	8,9	9,9	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9
22	9,5	10,6	12,3	14,0	16,3	18,1	21,3	24,9
23	10,2	10,3	13,1	14,8	17,2	19,0	22,3	26,0
24	10,9	12,0	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1
25	11,5	12,7	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,1
26	12,2	13,4	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,3
27	12,9	14,1	16,2	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3
28	13,6	14,8	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4
29	14,3	15,6	17,7	19,8	22,5	24,6	28,3	32,5
30	15,0	16,3	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5

Додаток 5

КРИТИЧНІ ТОЧКИ РОЗПОДІЛУ ФІШЕРА (*F*-РОЗПОДІЛУ)

Рівень значущості 0,05									
k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	12	24	∞
1	164,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	244,9	249,0	254,3
2	18,5	9,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,7	8,6	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	5,9	5,8	5,6
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,7	4,5	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,0	3,8	3,7
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,6	3,4	3,2
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,3	3,1	2,9
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,1	2,9	2,7
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	2,9	2,7	2,5
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	2,8	2,6	2,4
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,7	2,5	2,3
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,6	2,4	2,2
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,5	2,3	2,1
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,5	2,3	2,1
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,4	2,2	2,0
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,4	2,2	2,0
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,3	2,1	1,9
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
22	4,3	3,4	3,1	2,8	2,7	2,6	2,2	2,0	1,8
24	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,2	2,0	1,7
26	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,7
28	4,2	3,3	2,9	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,6
30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,1	1,9	1,6
40	4,1	3,2	2,9	2,6	2,5	2,3	2,0	1,8	1,5
60	4,0	3,2	2,8	2,5	2,4	2,3	1,9	1,7	1,4
120	3,9	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	1,8	1,6	1,3
∞	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	1,8	1,5	1,0

Рівень значущості 0,01										
k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5981	6106	6234	6366
2	98,5	99,0	99,2	99,3	99,3	99,4	99,3	99,4	99,5	99,5
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,5	27,1	26,6	26,1
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	14,8	14,4	13,9	13,5
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,3	9,9	9,5	9,0
6	13,7	10,9	9,8	9,2	8,8	8,5	8,1	7,7	7,3	6,9
7	12,3	9,6	8,5	7,9	7,5	7,2	6,8	6,5	6,1	5,7
8	11,3	8,7	7,6	7,0	6,6	6,4	6,0	5,7	5,3	4,9
9	10,6	8,0	7,0	6,4	6,1	5,8	5,5	5,1	4,7	4,3
10	10,0	7,6	6,6	6,0	5,6	5,4	5,1	4,7	4,3	3,9
11	9,7	7,2	6,2	5,7	5,3	5,1	4,7	4,4	4,0	3,6
12	9,3	6,9	6,0	5,4	5,1	4,8	4,5	4,2	3,8	3,4
13	9,1	6,7	5,7	5,2	4,9	4,6	4,3	4,0	3,6	3,2
14	8,9	6,5	5,6	5,0	4,7	4,5	4,1	3,8	3,4	3,0
15	8,7	6,4	5,4	4,9	4,6	4,3	4,0	3,7	3,3	2,9
16	8,5	6,2	5,3	4,8	4,4	4,2	3,9	3,6	3,2	2,8
17	8,4	6,1	5,2	4,7	4,3	4,1	3,8	3,5	3,1	2,7
18	8,3	6,0	5,1	4,6	4,3	4,0	3,7	3,4	3,0	2,6
19	8,2	5,9	5,0	4,5	4,2	3,9	3,6	3,3	2,9	2,4
20	8,1	5,9	4,9	4,4	4,1	3,9	3,6	3,2	2,9	2,4
22	7,9	5,7	4,8	4,3	4,0	3,8	3,5	3,1	2,8	2,3
24	7,8	5,6	4,7	4,2	3,9	3,7	3,3	3,0	2,7	2,2
26	7,7	5,5	4,6	4,1	3,8	3,6	3,3	3,0	2,6	2,1
28	7,6	5,5	4,6	4,1	3,8	3,5	3,2	2,9	2,5	2,1
30	7,6	5,4	4,5	4,0	3,7	3,5	3,2	2,8	2,5	2,0
40	7,3	5,2	4,3	3,8	3,5	3,3	3,0	2,7	2,3	1,8
60	7,1	5,0	4,1	3,7	3,3	3,1	2,8	2,5	2,1	1,6
120	6,9	4,8	4,0	3,5	3,2	3,0	2,7	2,3	2,0	1,4
∞	6,6	4,6	3,8	3,3	3,0	2,8	2,5	2,2	1,8	1,0

Рівень значущості 0,001										
k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	Змінюється від 400 000 до 600 000									
2	998	999	999	999	999	999	999	999	999	999
3	167	148	141	137	135	133	131	128	126	123
4	74,1	61,3	56,2	53,4	51,7	50,5	49,0	47,4	45,8	44,1
5	47,0	36,6	33,2	31,1	29,8	28,8	27,6	26,4	25,1	23,8
6	35,5	27,0	23,7	21,9	20,8	20,0	19,0	18,0	16,9	15,8
7	29,2	21,7	18,8	17,2	16,2	15,5	14,6	13,7	12,7	11,7
8	25,4	18,5	15,8	14,4	13,5	12,9	12,0	11,2	10,3	9,3
9	22,9	16,4	13,9	12,6	11,7	11,1	10,4	9,6	8,7	7,8
10	21,0	14,9	12,6	11,3	10,5	9,9	9,2	8,5	7,6	6,8
11	19,7	13,8	11 ,6	10,4	9,6	9,1	8,3	7,6	6,9	6,0
12	18,6	13,0	10,8	9,6	8,9	8,4	7,7	7,0	6,3	5,4
13	17,8	12,3	10,2	9,1	8,4	7,9	7,2	6,5	5,8	5,0
14	17,1	11,8	9,7	8,6	7,9	7,4	6,8	6,1	5,4	4,6
15	16,6	11,3	9,3	8,3	7,6	7,1	6,5	5,8	5,1	4,3
16	16,1	11,0	9,0	7,9	7,3	6,8	6,2	5,6	4,9	4,1
17	15,7	10,7	8,7	7,7	7,0	6,6	6,0	5,3	4,6	3,9
18	15.4	10,4	8,5	7,5	6,8	6,4	5,8	5,1	4,5	3,7
19	15,1	10,2	8,3	7,3	6,6	6,2	5,6	5,0	4,3	3,5
20	14,8	10,0	8,1	7,1	6,5	6,0	5,4	4,8	4,2	3,4
22	14,4	9,6	7,8	6,8	6,2	5,8	5,2	4,6	3,9	3,2
24	14,0	9,3	7,6	6,6	6,0	5,6	5,0	4,4	3,7	3,0
26	13,7	9,1	7,4	6,4	5,8	5,4	4,8	4,2	3,6	2,8
28	13,5	8,9	7,2	6,3	5,7	5,2	4,7	4,1	3,5	2,7
30	13,3	8,8	7,1	6,1	5,5	5,1	4,6	4,0	3,4	2,6
40	12,6	8,2	6,6	5,7	5,1	4,7	4,2	3,6	3,0	2,2
60	12,0	7,8	6,2	5,3	4,8	4,4	3,9	3,3	2,7	1,9
120	11,4	7,3	5,8	5,0	4,4	4,0	3,5	3,0	2,4	1,6
∞	10,8	6,9	5,4	4,6	4,1	3,7	3,3	2,7	2,1	1,0

Додаток 6

КРИТИЧНІ ТОЧКИ РОЗПОДІЛУ χ^2

Число ступенів свободи, *k*	Рівень значущості, α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,999
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38.9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	60,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Задорожня Т.М. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики: Навчальний посібник. / Т.М. Задорожня, Ю.В. Коляда, Г.В. Мамонова. – Ірпінь: Академія ДПС України, 2001. – 77 с.

2. Рудоміно-Дусятська І.А. Теорія ймовірностей, теорія випадкових процесів та математична статистика (частина І). : Навчальний посібник. / І.А. Рудоміно-Дусятська, Л.М. Козубцова, О.Ю. Пояркова, Т.В. Соловйова, В.Є. Сновида, Л.М. Цитрицька – К.: ВІТІ, 2018. – 187 с.

3. Жильцов О.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О.Б. Жильцов; за ред. Г.О. Михаліна. — К.: Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. — 336 с.

4. Бобик О.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: підручник / О.І. Бобик, Г.І. Берегова, Б.І. Копитко. URL: https://drive.google.com /file/d/0B6TGL3jQ-_8jWkhjS1FmeXVkVjA/view (дата звернення 01.04.2020)

5. Волощенко А. Б., Джалладова І. А. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. URL: https://drive.google.com/file/d/0B6TGL3jQ-_8jd2hiZGg3dlJjejg/view (дата звернення 01.04.2020)

6. Жалдак М.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: підручник [для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів]. URL: http://zhaldak.npu.edu.ua/drukovani-pratsi/posibnyky-ta-pidruchnyky (дата звернення 01.04.2020)

7. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник. У 2 ч. — Ч. І. Теорія ймовірностей. URL: https://www.studmed.ru/view/zhluktenko-v-nakonechniy-s-teorya-ymovrnostey-matematichna-statistika-u-2-ch-ch-teorya-ymovrnostey_0fb78eec1a0.html (дата звернення 01.04.2020)

8. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник. У 2 ч. — Ч. ІІ. URL: https://www.studmed.ru/view/zhluktenko-v-nakonechniy-s-savna-ss-teorya-ymovrnostey-matematichna-statistika-u-2-h-ch-ch-matematichna-statistika_3976c660ed4.html (дата звернення 01.04.2020)

Теорія ймовірностей та математична статистика [Текст]: Методичні вказівки до практичних занять для здобувачів фахової передвищої освіти освітньо-професійної програми «Комп’ютерна інженерія» галузь знань 12 Інформаційні технології спеціальностей 123 Комп’ютерна інженерія, 126 Інформаційні системи та технології денної форми навчання та освітньо-професійної програми «Менеджмент» галузь знань 07 Управління та адміністрування спеціальності 073 Менеджмент денної та заочної форм навчання / уклад. Ю. В. Боровська. – Луцьк : ТФК Луцького НТУ, 2021. – 68 с.

Комп’ютерний набір	Ю. В. Боровська
Редактор	Ю. В. Боровська

Підп. до друку «___»________2021 р.
Формат 60x84/16. Папір офс. Гарн. Таймс.
Ум. друк. арк. 4,2.
Тираж __ прим.

Інформаційно-видавничий відділ
Луцького національного технічного університету
43018, м. Луцьк, вул. Львівська, 75
Друк – ІВВ Луцького НТУ