ІЛЬМАН В.М.   МИХАЙЛОВА Т.Ф.   САМОЙЛОВ С.П.   ПАНІК Л.О.

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ

ДНІПРО, 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Дніпровський національний університет
залізничного транспорту
імені академіка В. Лазаряна

Кафедра «Комп'ютерні інформаційні технології»

ІЛЬМАН В.М.
МИХАЙЛОВА Т.Ф.
САМОЙЛОВ С.П.
ПАНІК Л.О.

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ

Навчальний посібник

Дніпро 2020

УДК 519.863 (075.8)
О 62
ТОВ підприємство «Дріант»
ISBN 978-966-2394-45-0

Рекомендовано до друку Вченою Радою Дніпровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна як навчальний посібник
(протокол № 11 від 02 липня 2020 р.)
Зареєстровано НМВ університету
(протокол № 5 від 17 червня 2020 р.)

Рецензенти

В.Є. Білозьоров, доктор фіз.-мат. наук, професор (ДНУ)

С.О. Пічугов, доктор фіз.-мат. наук, професор (ДНУЗТ)

Д.Г. Зеленцов, завідувач кафедри інформаційних систем ДВНЗ «УДХТУ», доктор техн., наук, професор

П 62 ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ: навчальний посібник [Текст] / В.М. Ільман, Т.Ф. Михайлова, С.П. Самойлов, Л.О. Панік – Дніпровський нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Дніпро: ТОВ підприємство «Дріант» 2020. – 240с. ISBN 978-966-2394-45-0

УДК 519.863 (075.8)

Навчальний посібник охоплює основні розділи задач математичного програмування з чіткою та нечіткою постановками. В ньому наводяться матеріали і основні поняття з лінійного, нелінійного та динамічного програмування. Розглянуто як теоретичні так і практичні питання задач економіки, наведено методологію побудови оптимізаційних математичних моделей економічних задач і різноманітні прийоми як аналітичного, так і наближеного вирішення цих задач.

Навчальний посібник призначений для студентів економічних спеціальностей. Навчальний посібник також може бути корисним для студентів, що навчаються за напрямами підготовки «Комп'ютерні науки» та «Інженерія програмного забезпечення».

ISBN 978-966-2394-45-0

ЗМІСТ

ГЛОСАРІЙ 6
ВСТУП 9
РОЗДІЛ 1. ЧІТКІ МОДЕЛІ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ 12
ВСТУП ДО РОЗДІЛУ 1 13
Глава 1. Базові поняття 14
1.1. Структуризація предметної області, задача і модель 14
1.2. Класи оптимізаційних моделей 23
1.3. Алгоритм і його представлення. Алгоритм графічного вирішення задач ЛП 31
Глава 2. Методи і алгоритми розв'язання задач ЛП і двоїстих задач 40
2.1. Симплекс алгоритм і метод штучного базису для вирішення задач лінійного програмування 40
2.2. Застосування прикладних програмних пакетів до пошуку рішення задач ЛП 49
2.3. Двоїста задача лінійного програмування 59
Глава 3. Спеціальні задачі лінійного програмування 68
3.1. Транспортна задача 68
3.2. Дробово-лінійна задача 77
3.3. Багатокритеріальні, параметричні лінійні задачі 86
3.4 Ціло-чисельне, блокове і ігрове програмування. Аналіз моделей на чутливість 94
Глава 4. Нелінійні оптимізаційні задачі економіки 103
4.1. Класифікація задач НЛП. Графічний метод розв'язання нелінійних задач 103
4.2. Опукле і квадратичне програмування 112
4.3. Наближене розв'язування задач НЛП. Методи кусково-лінійної апроксимації та Франка-Вульфа 119

4.4. Методи штрафних функцій та Ерроу-Гурвіца наближеного розв'язання нелінійних задач 128

Глава 5. Елементи динамічного програмування та їх застосування 137

5.1. Загальні поняття динамічного програмування 137

5.2. Розв'язання задачі динамічного програмування 146

ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА 154

Додаток 6. Набуття навичок 154

6.1 Завдання 1 154

6.2 Приклад вирішення завдання 174

6.3. Питання до захисту завдання 1. 175

6.4. Завдання 2 176

6.5 Приклад вирішення завдання 177

6.6 Питання до захисту завдання 2. 178

6.7. Контроль знань 180

6.7.1 Контрольні запитання до глави 1 180

6.7.2 Тестові запитання до глави 1 181

6.7.3. Контрольні запитання до глави 2 182

6.7.4. Тестові запитання до глави 2 183

6.7.5. Контрольні запитання до глави 3 186

6.7.6. Тестові запитання до глави 3 187

6.7.7. Контрольні запитання до глави 4 190

6.7.8. Тестові запитання до глави 4 191

6.7.9. Контрольні запитання до глави 5 194

6.7.10. Тестові запитання до глави 5 194

РОЗДІЛ 2. НЕЧІТКІСТЬ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ 196

ВСТУП до розділу 2 197

Глава 1. Елементи нечітких множин 198

1.1.Основні поняття і визначення 198

1.2. Способи побудови функцій належності 200

1.3. Операції над інтервальними і нечіткими атрибутами 203

1.4. Вправи 207
1.5. Визначення нечіткостей і виконання операцій над нечіткими величинами у прикладному пакеті MatLab 209
Глава 2. Застосування елементів нечітких множин до моделювання задач економіки 216
2.1. Постановки задач на інтервальних даних 217
2.2. Нечіткі постановки задач 220
2.3. Застосування прикладного пакету MatLab для розв'язання задач лінійного програмування 222
2.4. Лабораторні роботи 225
2.5. Індивідуальні завдання 227
Література 237

ГЛОСАРІЙ

Елемент – неподільний об'єкт – число, буква тощо, однорідні елементи мають однакову природу (тип), так, сукупність букв і цифр – не однорідна.

Множини – сукупність різних однорідних і вільних елементів.

Мультомножина – множина, в якій окремі елементи можуть повторюватися.

Послідовність – множина з упорядкованими за яким-то признаком елементами.

Нечітка величина – величина, значення якої визначаються множиною даних.

Система – множина зв'язаних яким-то чином елементів.

Предметна область – область визначення предмета (фінансова область, область виробничої діяльності)

Модель – система, яка адекватно відтворює призначення об'єктів предметної області.

Системний підхід до предметної області – погляд на предметну область як на систему.

Структуризація предметної області – визначення складових предметної області , зв'язків між ними, формалізація і інше необхідне для побудови моделі предметної області.

Лінійна функція – яка задається лінійним правилом, наприклад, $f(x)=x,\ f(x,y)=ax+by,\ f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$.

Нелінійна функція – яка визначена нелінійним способом задання, наприклад, $f(x)=ax+\ln x-b\sin x^2$.

Квадратична функція – функція виду $f(X)=a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2$.

Математичне програмування – розділ математики, в якому вивчаються методі вирішення задач $\begin{cases}F(X)\to\max|\min,\\ G(X)\le|\ge B,\end{cases}$ з визначення невідомих $x_i\in X$, де $F(X)$ – *цільова функція*, $G(X)$ – *функція обмежень*.

Задача математичного програмування – є $\begin{cases}F(X)\to\max|\min,\\ G(X)\le|\ge B.\end{cases}$

Задача лінійного програмування – це задача математичного програмування, в якій функції обмежень і цільова лінійні.

Задача векторної оптимізації – це задача математичного програмування з цільовою функцією $F(X)=\begin{cases} f_1(X)\to ext, \\ \cdots \\ f_m(X)\to ext, \end{cases}$

Задача ціло-чисельного програмування – невідомі в якій можуть приймати тільки цілі числові значення.

Задача параметричного програмування – цільова функція чи функції, що визначають область можливих значень змінних, або те й інше залежать від деяких параметрів.

Задача дробово-лінійного програмування – цільова функція якої являє собою відношення двох лінійних функцій.

Задача динамічного програмування – задача, процес знаходження рішення якої є багатоетапним.

Стандартна задача – це задача лінійного програмування, в якій застосовується нерівність $\leq$ і функція цілі іде до максимуму.

Канонічна задача – стандартна задача, в обмеженнях якої застосовуються тільки знак «=».

Допустимий план – множина рішень задачі програмування, які задовольняють умовам обмежень.

Оптимальний план – допустимий план, котрий доставляє екстремум функції цілі.

Багатокутник рішень – не порожня множина планів основної задачі лінійного програмування

Алгоритм – на інтуїтивному рівні, послідовність дій, за якою досягається певна мета і який має дві сторони: представлення і реалізацію.

Симплекс – поверхня, нап'ята на сукупність базисних точок евклідового простору.

Двоїста задача – по відношенню до прямої лінійної задачі, утворена функцією цілі з коефіцієнтами обмежень прямої задачі і коефіцієнтами обмежень визначеними на коефіцієнтах функції цілі прямої задачі.

Транспортна задача – полягає у визначенні оптимального плану перевозок деякого однорідного вантажу з пунктів відправлення в пункти призначення.

Стратегії гри – така поведінки гравців на ринковому просторі, щоб в результаті вони мали обопільну вигоду.

ГЛОСАРІЙ

Елемент – неподільний об'єкт – число, буква тощо, однорідні елементи мають однакову природу (тип), так, сукупність букв і цифр – не однорідна.

Множини – сукупність різних однорідних і вільних елементів.

Мультомножина – множина, в якій окремі елементи можуть повторюватися.

Послідовність – множина з упорядкованими за яким-то признаком елементами.

Нечітка величина – величина, значення якої визначаються множиною даних.

Система – множина зв'язаних яким-то чином елементів.

Предметна область – область визначення предмета (фінансова область, область виробничої діяльності)

Модель – система, яка адекватно відтворює призначення об'єктів предметної області.

Системний підхід до предметної області – погляд на предметну область як на систему.

Структуризація предметної області – визначення складових предметної області , зв'язків між ними, формалізація і інше необхідне для побудови моделі предметної області.

Лінійна функція – яка задається лінійним правилом, наприклад, $f(x)=x,\ f(x,y)=ax+by,\ f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$.

Нелінійна функція – яка визначена нелінійним способом задання, наприклад, $f(x)=ax+\ln x-b\sin x^2$.

Квадратична функція – функція виду $f(X)=a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2$.

Математичне програмування – розділ математики, в якому вивчаються методі вирішення задач $\begin{cases}F(X)\to\max|\min,\\ G(X)\le|\ge B,\end{cases}$ з визначення невідомих $x_i\in X$, де $F(X)$ – *цільова функція*, $G(X)$ – *функція обмежень*.

Задача математичного програмування – є $\begin{cases}F(X)\to\max|\min,\\ G(X)\le|\ge B.\end{cases}$

Задача лінійного програмування – це задача математичного програмування, в якій функції обмежень і цільова лінійні.

Задача векторної оптимізації – це задача математичного програмування з цільовою функцією $F(X)=\begin{cases} f_1(X)\to ext, \\ \cdots \\ f_m(X)\to ext, \end{cases}$

Задача цілочисельного програмування – невідомі в якій можуть приймати тільки цілі числові значення.

Задача параметричного програмування – цільова функція чи функції, що визначають область можливих значень змінних, або те й інше залежать від деяких параметрів.

Задача дробово-лінійного програмування – цільова функція якої являє собою відношення двох лінійних функцій.

Задача динамічного програмування – задача, процес знаходження рішення якої є багатоетапним.

Стандартна задача – це задача лінійного програмування, в якій застосовується нерівність $\leq$ і функція цілі іде до максимуму.

Канонічна задача – стандартна задача, в обмеженнях якої застосовуються тільки знак «=».

Допустимий план – множина рішень задачі програмування, які задовольняють умовам обмежень.

Оптимальний план – допустимий план, котрий доставляє екстремум функції цілі.

Багатокутник рішень – не порожня множина планів основної задачі лінійного програмування

Алгоритм – на інтуїтивному рівні, послідовність дій, за якою досягається певна мета і який має дві сторони: представлення і реалізацію.

Симплекс – поверхня, нап'ята на сукупність базисних точок евклідового простору.

Двоїста задача – по відношенню до прямої лінійної задачі, утворена функцією цілі з коефіцієнтами обмежень прямої задачі і коефіцієнтами обмежень визначеними на коефіцієнтах функції цілі прямої задачі.

Транспортна задача – полягає у визначенні оптимального плану перевозок деякого однорідного вантажу з пунктів відправлення в пункти призначення.

Стратегії гри – така поведінки гравців на ринковому просторі, щоб в результаті вони мали обопільну вигоду.

Чутливість – системи до тих чи інших змін у системі по відношенню до її оптимальності.

Сідлова точка – критична точка функції, в околі якої в залежності від напряму функція змінює екстремальний показник.

Функція Лагранжа – лінійна комбінація функції цілі і функцій обмежень в нелінійній задачі програмування.

Опукла множина –якщо з будь-якими двома її точками x і y містить в собі інтервал $[x,y]$.

Опукла функція – якщо $f(X)$, задана на опуклій множині X, і якщо для будь-яких двох підмножин $X_1, X_2 \subset X$ та будь-якого параметру $0 \leq \lambda \leq 1$ виконується відношення $f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \geq (\leq)\, \lambda f(X_1) + (1-\lambda) f(X_2)$.

Сепарабельна функція – якщо її можна представити у вигляді суми одно-місцинних функції.

Градієнт функції – вектор компоненти, якого є часткові похідні цієї функції по її змінним.

Функція належностей – характеристика нечіткої величини значення якої змінюється від 0 до 1.

Нечітка величина – пара: ім’я нечіткої величини та її функція належностей.

ВСТУП

Економіка є штучною наукою створеною людством для вирішення проблем майнових, фінансових та інших проблем взаємовідношень між людьми, групами людей за спільними інтересами, державами тощо. Сучасна економіка розвивається у прикладному і теоретичному напрямках Практичний напрям пов'язаний з вирішенням практичних задач фінансової, виробничої і іншої діяльності. Теоретичний напрямок пов'язаний з розробкою методології вирішення проблем економіки, з застосуванням математичних методів у рішенні економічних питань та впровадження їх у розвиток практичної економіки. Так ринкова економіка має справу з розмитими показниками ціни, випуску продукції тощо, що потребує розробки апарату для роботи з такими даними, або економічна статистика стикається з часовими рядами (економічними даними представленими у часі), що також потребує напрацювання методології операцій з такими нечіткими даними.

Задачі економіки потребують пошуків оптимальних рішень, ці питання вирішуються у розділі математики «математичне програмування». Математичне програмування (МП) являє собою математичну дисципліну, яка займається вивченням екстремальних задач і розробкою методів їх вирішення. Математичне програмування до класичного програмування не має ніякого відношення. МП виникло із класичного розділу математики про знаходження екстремуму функцій багатьох змінних. Термін «програмування» тут застосовується у зв'язку з тим, що значення невідомих, які знаходяться під час рішення задачі, за правило визначають схему, алгоритм або план виробничої та економічної діяльності.

Сучасне математичне програмування включає лінійне програмування (ЛП), нелінійне програмування (НП) і різні їх модифікації.

Лінійне програмування сформувалося у 40 – 50 роках 20 ст. завдяки науковим розробкам Л.В.Канторовича. ЛП зараз широко застосовуються в економіці, і введені ним поняття оптимальний план, оптимальний розподіл ресурсів тощо.

Сучасний рівень кібернетики і економічної зокрема передбачає володіння оптимізаційними методами для вибору кращого із можливих розв'язків прикладних задач певної предметної області для обґрунтованого керування.

Отже для фахівців з економічної кібернетики у напрямку оптимізаційних методів та моделей необхідно вміти ставити і коректно формулювати задачі та моделі для пошуку оптимального розв'язку, також володіти методами та алгоритмами наближеного розв'язання різновидів оптимізаційних задач і вміти застосовувати знайдені результати у питаннях практичної діяльності, поведінки тощо.

Таким чином, предмет оптимізації передбачає послідовність дій за формулою: структуризація предмета дослідження + постановка задачі + формування математичної моделі + розробка алгоритму пошуку рішення + реалізація алгоритму + пристосування оптимізаційних результатів до предметної області.

Виходячи з цього знання теоретичних питань і практичних навичок їх представлення та алгоритмів пошуку рішень є важливим елементом професійних знань для фахівців з економічної кібернетики.

Вирішення оптимізаційних задач предметних областей потребують її структуризації, розробки алгоритмів, представленням яких є алгоритмічна програма (програма) написана на тій чи іншій мові. Реалізація алгоритмів за їх представленням проводиться людиною, штучним виконавцем (машиною) тощо. Ефективність представлення і виконання алгоритму рішення задачі залежить від вибраного прикладного середовища.

Оптимізаційні методи, у сучасному розумінні – прикладний розділ науки «Математичне програмування» загальної теорії «Теорія оптимізації», в яких вивчаються основи математичних моделей оптимізації, задачі та методи їх розв'язування. З даної дисципліни існує досить поширений клас літератури, частина з якої застосовується в матеріалах посібника. Фундаментальним джерелом з предмету навчального посібника є роботи [1 – 4, 6 – 8], котрим надана перевага при виборі матеріалів.

В матеріалах, котрі наводяться як базові питання з понять оптимізація, модель та її різновиди, алгоритмів та методів, так і спеціальні питання лінійних і нелінійних оптимізаційних моделей програмування, та аналітичні і наближені методи пошуку рішень прикладних задач оптимізації. Розглянуто питання динамічного програмування постановки задач і методи їх вирішення.

Висвітлення матеріалів посібника наведено у двох розділах, сьома главах та практичних і контрольних додатках.

РОЗДІЛ 1.
ЧІТКІ МОДЕЛІ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

$$\begin{cases} (C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ (X_1, X_2, \ldots, X_n) \end{cases} \xrightarrow[ext]{} F(C, X)$$

ВСТУП ДО РОЗДІЛУ 1

Успішна реалізація досягнень науково-технічного прогресу тісним чином пов'язана з використанням математичних методів та засобів обчислювальної техніки для розв'язку задач з різних галузей діяльності людини. Виключно важливе значення має використання зазначених методів та засобів і при розв'язку економічних задач. В зв'язку з цім для студентів економічних спеціальностей, які навчаються в вищих навчальних закладах, необхідно як знання можливостей застосування математичних методів і ЕОМ, так і розуміння тих проблем, що мають місце при їх використанні.

В розділі 1 наявного навчального посібника викладен матеріал, що дозволяє отримати досить широке уявлення о можливостях практичного використання математичного програмування та ЕОМ при розв'яку певних економічних задач. В цьому розділі розглядаються задачі математичного програмування виключно в чіткій постановці. Насправді цей клас задач дуже поширен в повсякденній практиці. Тому вивчення цього матеріалу дуже важливе для майбутніх фахівців в області економічної кібернетики. Воно дозволить краще орієнтуватись в том розмаїтті проблем які виникають при побудові оптимізаційних моделей та застосуванні методів їх розв'язку для отримання важливих рішень. Ці розв'язкі можуть мати важливе значення для прийнятті управлінських рішень при керуванні великими об'єктами та системами.

Цей розділ може бути корисним насамперед для тих, хто намагається самостійно вивчити зазначені питання і бажає отримати необхідні навички для розв'язку практичних задач.

На початку кожного параграфу розділу 1 навчального посібника надано визначення, формули та інші стислі теоретичні відомості і методичні вказівки, що необхідні для розв'язку наведених задач. Потім надається детальний розв'язок типових задач зі стислими поясненнями теоретичних положень. В навчальнім посібнику наведено також задачі для самостійного вирішення.

Більшість задач має умовний характер, а числові параметри взяти такими, щоб при розв'язку задач можна було б обійтись досить простими обчисленнями.

Додаткові відомості із теорії, а також завдання для самостійного розв'язку можна отримати із книг, які наведені в переліку літератури.

Глава 1. Базові поняття

У розділі наведені базові відомості необхідні здобувачеві для засвоєння матеріалу посібника. Дано попереднє знайомство з поняттям моделі, оптимізації, алгоритму та методами його представлення, методологією створення моделі та графічним розв'язком задач за моделями і пристосування розв'язків до питань керування та прийняття рішень.

Матеріали розділу наведені у трьох параграфах.

1.1. Структуризація предметної області, задача і модель.

1.2. Класи оптимізаційних моделей.

1.3. Алгоритм і його представлення. Алгоритм графічного вирішення задач ЛП.

1.1. Структуризація предметної області, задача і модель

Введення нових понять їх розуміння в постановку і вирішення задач економіки потребують застосування необхідного математичного апарату.

Поняття, які застосовується у цьому посібникові є питання множин та їх різновидів, системи, її структурізація, побудова оптимізаційних моделей предметної області, алгоритмів, програм, як об'єктів представлення на алгоритмічній мові і її реалізації на ЕОМ, математичної задачі, методи розв'язання задач та інше. Частково деякі поняття наведені у глосарії до посібника.

Перейдемо до детального розгляду базових понять: які використовуються у матеріалах посібника.

До базових понять відноситься поняття *множини*, під яким розуміється сукупність різних однорідних і вільних елементів. Де елемент є неподільний об'єкт – число, буква тощо, однорідні елементи мають однакову природу (тип), так, сукупність букв і цифр – не однорідна. Елементи множини вільні, тобто їх порядок (розташування) у сукупності неважливий. Наприклад, множини $\{a,b,c\}$ і $\{c,b.a\}$ однакові. У множині елементи можуть повторюватися, тоді її звуть *мультомножиною*. Так денна виручка торгівельних точок фірми може бути такою $\{3500;4660;3500;5450\}$, що означає мультомножинний прибуток фірми від торгівлі. Якщо елементи сукупності неоднорідні тоді її називають *кортежем*. Наприклад, кортеж утворює сукупність торгівельних точок і їх виручки $\{T_1,3500;T_2,4660;T_3,3500;T_4,5450\}$.

Послідовність – множина з упорядкованими за яким-то признаком елементами. У послідовності елементи не можна міняти місцями, тобто

$$Po=\{a,b,c,d,e\}\neq\{b,a,e,d,c\}.$$

Кожна множина, яка застосовується у відповідній предметній області (ПО) має яку-то семантику. Наприклад, множина деталей, множина хлібо-булочної випічки. Семантична характеристика предметної множини M зветься атрибутом, що позначимо символом a. Тоді множина з атрибутом представляється у вигляді $_aM$. Множина $_aM$ може бути складною, коли вона утворена з інших множин, наприклад, $\{_{a_1}M_1, {}_{a_2}M_2,\cdots, {}_{a_k}M_k\}$.

У ринкових умовах економічні показники, як правило, визначаються нечітко. Нечіткості бувають різних типів. Розглянемо нечітку форму даних *інтервального* типу. Наприклад, якщо товар з назвою t змінює цінове значення від $|\underline{t}|$ до $|\overline{t}|$ при умові, що $|\underline{t}|\leq|\overline{t}|$, тоді ціну товару t можна задати інтервалом $|t|=[|\underline{t}|,|\overline{t}|]$. Отже множині товарів $T=\{t_i\}_{i=1}^{k}$ відповідає множина інтервальних цінових значень $|T|=\{|t_i|\}_{i=1}^{k}$.

Отже, для розглянутого прикладу із значенням інтервальної ціни $|t|$ товару товар t з інтервальним атрибутом цінових значень $|t|=[|\underline{t}|,|\overline{t}|]$ може бути представлено, як $_{|t|}t$.

Розглянемо способи задання інтервалів, які в подальшому позначаємо великими символами A, B і так далі

1. Звичайний, множинній спосіб задання – $A=[\underline{a},\overline{a}]=\{x;\ \underline{a}\leq x\leq\overline{a}\}$,

де $\underline{a}$ – нижня межа інтервалу A, $\overline{a}$ – верхня межа інтервалу A.

2. $A=[a_i]_{i=1}^{n}$, перелічена послідовність, у якій $a_{i-1}\leq a_i$.

3. Центрований спосіб з відхиленням – $A=[a,a_1,a_2]=(a,a_1,a_2)$, так, що $\underline{a}=a-a_1$ і $\overline{a}=a+a_2$; a – центроване значення інтервалу.

Нагадаємо, що в математиці множина з квадратними дужками передбачає включення меж у інтервал, круглі дужки означають відсутність меж у інтервалі (відкритий інтервал).

Наведемо арифметичні операції над інтервалами $[\underline{a},\overline{a}]$ і $[\underline{b},\overline{b}]$, які виконуються за правилами:

Операція складання

$$[\underline{a},\overline{a}]+[\underline{b},\overline{b}]=[\underline{a}+\underline{b},\overline{a}+\overline{b}],$$

Операція складання має властивості, вона – комутативна і асоціативна.

Операція віднімання діє за правилом

$$[\underline{a},\overline{a}]-[\underline{b},\overline{b}]=\begin{cases}[\underline{a}-\overline{b},\overline{a}-\underline{b}], & \underline{a}\neq\underline{b}\ \&\ \overline{a}\neq\overline{b};\\ [0,0]=0, & \underline{a}=\underline{b}\ \&\ \overline{a}=\overline{b};\end{cases}$$

Операція множення

$$[\underline{a},\overline{a}]\times[\underline{b},\overline{b}]=[\min C,\max C],\ \text{де}\ C=\{\underline{a}\underline{b},\underline{a}\overline{b},\overline{a}\underline{b},\overline{a}\overline{b}\};$$

У випадку, коли $\underline{a}\geq 0,\ \underline{b}\geq 0$ має місце:

$$[\underline{a},\overline{a}]\times[\underline{b},\overline{b}]=[\underline{a}\underline{b},\overline{a}\overline{b}].$$

Операція множення комутативна і асоціативна.

Операція ділення

$$[\underline{a},\overline{a}]:[\underline{b},\overline{b}]=\begin{cases}[\min C_1,\max C_1], & \underline{a}\neq\underline{b}\ \&\ \overline{a}\neq\overline{b};\\ [1,1]=1, & \underline{a}=\underline{b}\ \&\ \overline{a}=\overline{b};\end{cases}$$

де $C_1=\{\underline{a}:\underline{b},\underline{a}:\overline{b},\overline{a}:\underline{b},\overline{a}:\overline{b}\}$.

У випадку, якщо $\underline{a}\geq 0,\ \underline{b}>0$, тоді:

$$[\underline{a},\overline{a}]:[\underline{b},\overline{b}]=[\underline{a}:\overline{b},\overline{a}:\underline{b}].$$

Операція ділення інтервалів має місце тоді, коли $0\notin[\underline{b},\overline{b}]$.

Мають місце теоретико-множинні операції на інтервалах $(\cup,\cap,\setminus)$ і відношення $(=,\subset,\supset)$. Але взагалі, невизначені відношення $(>,<)$.

Для комутативності по складанню і множенню інтервалів справедливо відношення $A(B+C)\subseteq AB+AC$.

З іншими особливостями інтервальних операцій та математичним аналізом на інтервальних множинах можна ознайомитися в роботі [4].

Система – взагалі визначається інтуїтивно як чогось багато. Але таке визначення неприйнятно для оперування з цим поняттям. Дамо визначення скінченної системи.

Система S є множина зв'язаних елементів, котра представляється як [5]:

$$S=\langle P,\{s_i\},\{z_{ij}\}\rangle.$$

де P – признак системи. Наприклад, система освіти (признаком є освіта)

Елементи системи s_i – неподільні об'єкти ПО (визначаються користувачем), між елементні зв'язки z_{ij} визначають правила (відношення) між елементами s_i і s_j. Зв'язки представляються графами, матрицями відношень та іншим чином. Наприклад, матричне представлення зв'язків:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Перейдемо до наступного поняття моделі. *Модель* – система, яка адекватно відтворює призначення об'єктів предметної області (ПО).

Прикладами об'єктів економічної ПО є торгівля, виробництво, збут і поставка товарів та інше. Кожен *об'єкт* O_i має певні характеристики, тобто $O_i(x_i) = {}_{x_i}O_i$.

Об'єкт O_1 є *подібним* до об'єкту O_2, якщо існують взаємно однозначне відношення φ такі, що $x_1 \xrightarrow{\varphi} x_2$ і навпаки. Подібність об'єктів записується, як: $O_1 \sim O_2$.

Моделі ПО поділяються по видам, типам тощо. Наведемо деякі *види моделей*:

- *предметні* (фізичні, економічні, інші) – пов'язані з конкретними ПО, наприклад, фінансова, виробнича, тощо;

- *абстрактні* – для яких використовується абстрактна мова їх опису, наприклад, диференційна модель у вигляді диференційних рівнянь, алгебраїчна модель, алгоритмічна модель і т. д.

Типи моделей , серед яких виділяють:

- *гносеологічні* – для дослідження явищ поведінки суспільства: економічних, політичних систем, культурних і інших.

- *інформаційні* – призначені для з'ясування, передачі повідомлень по каналах зв'язку.

- *сенсуальні* – при розгляді зорових, слухових систем сприйнять інформації, моделюванні чутливосте й. Застосовуються в роботизованих системах.

- *концептуальні* – для дослідження причинно-наслідкових відношень на зв'язках.

- *математичні* – представлення моделей у вигляді аналітичних виразів, алгоритмів, формальних виразів тощо.

Наведемо тепер деякі поширені методи, які застосовуються при моделюванні:

- *натурні*, які виконуються безпосередньо на об'єктах ПО;
- *чисельні*, які проводяться за розрахунковими формулами та алгоритмами;
- *статистичні*, котрі реалізуються за наборами даних досліджень;
- *аналітичні*, які проводяться за математичними моделями у вигляді аналітичних виразів;
- *імітаційні*, що застосовуються при дослідженні аналогів явищ ПО.

Розглянемо основні етапи моделювання, якими слід користуватися розробці і створені моделей ПО. Для коректної розробки моделей ПО необхідно володіти цією предметною областю, тобто слід її засвоїти с тим щоб правильно ставити в ній задачі, їх тлумачити тощо. Найбільш обґрунтованим і загальним підходом є *системний підхід*, який охоплює всебічний погляд на ПО як на систему, з'ясовує вплив вхідних факторів на її поведінку і на вихідні дані системи. В сучасному світі господарювання не можна обійтися без системного підходу при прийняті виробничих і державних рішень. Наведемо загальні етапи системного підходу до побудови моделі ПО. Отже, по перше системний підхід передбачає погляд на ПО як на систему, для якої спочатку виконується структуризація предметної області і задачі досліджень. Цьому етапі визначається:

- признак, елементи та мета системи;
- визнається сутності системи, які підпорядковуються меті;
- ставиться дослідницька задача.

Наступний підготовчий етап до побудови моделі досліджень поведінки системи, полягає у наступному:

- відбувається формалізація і описове відтворення явищ, поведінки системи на метамові;
- вибирається метод підходу до моделювання
  - морфологія – розподіл речовини в системі;
  - функціональне представлення – перетворення в системі;
  - інформаційні підходи – на основі теорії інформації.

На останньому етапі:

- будується сама модель;

- відбувається перевірка моделі на адекватність, коректність, логічність тощо;.

- виконується розробка алгоритму за моделлю (аналітично, чисельно і ін.);

- проводиться аналіз результатів вирішення задачі за отриманою моделлю..

Пояснення розглянутих етапів структуризації, моделювання і вирішення наведемо для виробничої предметної області.

Нехай, виробничий цех машинобудівного підприємства виготовляє для продажу три видів виробів А, В і С за цінами 10 грн, 14 грн,, 12 грн, відповідно, застосовуючи при цьому токарне, фрезерне, зварювальне та шліфувальне обладнання. Витрати часу на обробку одного виробу для кожного з типів обладнання вказані в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

	A	B	C
Фрезерне	2	4	5
Токарне	1	8	6
Зварювальне	7	4	5
Шліфувальне	4	6	7

Припустимо, що кількість персоналу який обслуговує обладнання виміряється фондом робочого часу, який складає по обладнаннях: фрезерне – 129 г., токарне – 289 г., зварювальне – 280 і шліфувальне – 360 г.

Структуризація виробництва цеху виділяє обладнання і його ресурс, продукцію та прибуток її реалізації, і кількість виготовленої продукції, яка зв'язує виробництво продукції з прибутком підприємства. Отже за результатами структуризації можливо побудувати системну таблицю 1.2.

Таблиця 1.2.

Тип обладнання	Витрати часу (станко-год) на обробку одного виробу виду			Загальний фонд робочого часу обладнання (год)
	A	B	C	
Фрезерне	2	4	5	120
Токарне	1	8	6	280
Зварювальне	7	4	5	240
Шліфувальне	4	6	7	360
Прибуток (грн.)	10	14	12	

Мета виробничої системи може бути різною, наприклад, пов'язаною з задачами: як зменшити виробничі витрати або збільшити прибуток, виготовляючи продукцію, або окремі її види. Всі ці задачі відносяться до функціонального підходу моделювання.

Розглянемо задачу, за якою потрібно визначити, скільки виробів і якого виду слід виготовити підприємству, щоб прибуток від їх реалізації був максимальним. За функціональним підходом для створення математичної моделі задачі, необхідно формалізувати виготовлену продукцію.

Нехай буде виготовлено x_1 одиниць виробів виду A , x_2 одиниць виду B і x_3 одиниць виду C. Тоді для виробництва такої кількості виробів потрібно затратити за таблицею 1.2 $2x_1+4x_2+5x_3$ станко-годин фрезерного обладнання.

Так як загальний фонд робочого часу верстатів даного типу не може перевищувати 120 г, тому повинна виконуватись нерівність

$$2x_1+4x_2+5x_3 \le 120 .$$

Аналогічні міркування щодо можливого використання токарного, зварювального та шліфувального обладнання приведуть до наступних нерівностей:

$$x_1+8x_2+6x_3 \le 280 ,$$
$$7x_1+4x_2+5x_3 \le 240 ,$$
$$4x_1+6x_2+7x_3 \le 360 .$$

При цьому, так як кількість виготовлених виробів не може бути від'ємною, тому

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \qquad (1.1)$$

Якщо буде виготовлено x_1 одиниць виробів виду A, x_2 одиниць виробів виду B і x_3 одиниць виробів виду C, тоді прибуток від їх реалізації за даними таблиці 1.2 складе $10x_1 + 14x_2 + 12x_3$ грн.

Таким чином, приходимо до наступної математичної задачі.

Дана система

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 120, \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 \leq 280, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 240, \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 360, \end{cases} \qquad (1.2)$$

чотирьох лінійних нерівностей з трьома невідомими $x_i,\ i = 1,2,3$ такими, що за (1.1) $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$ і функція відносно цих же невідомих

$$F(x) = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3, \qquad (1.3)$$

потрібно серед всіх невід'ємних розв'язків системи нерівностей (1.2) знайти такі, при яких функція (1.3) приймає максимальне значення.

Лінійна функція (1.3), максимум якої потрібно визначити, разом з системою нерівностей (2) і умовою невід'ємності змінних (1.1) утворюють математичну модель *вихідної задачі* виробничої системи. Так як функція (1.3), яка зветься *цільовою функцією*, лінійна, і система нерівностей (1.2) містить лише лінійні нерівності, то задача (1.1)-(1.3) є математичною *задачею лінійного програмування.* Аналітичні і наближені методи вирішення задач лінійного програмування буде розглянуто в подальшому.

Таким чином, розглянуті основні необхідні для подальшого деякі потрібні поняття.

Такі як фундаментальне поняття – модель, котре використовується для відтворення математичного представлення економічної оптимізаційної задачі. Поняття алгоритм необхідне, як інструментарій для вирішення економічних задач, які в багатьох випадках представляються системно. Інтервал є одним із модельних видів задання нечіткостей у ринкових відносинах і тому це поняття розглянуто у цьому параграфі.

1.2. Класи оптимізаційних моделей

Задачі економіки потребують пошуків оптимальних рішень, ці питання вирішуються у розділі математики «математичне програмування». *Математичне програмування* (МП) являє собою математичну дисципліну, яка займається вивченням екстремальних задач і розробкою методів їх вирішення. Математичне програмування до класичного програмування не має ніякого відношення. МП виникло із класичного розділу математики про знаходження екстремуму функцій багатьох змінних. Термін «програмування» тут застосовується у зв'язку з тим, що значення невідомих, які знаходяться під час рішення задачі, за правило визначають схему, алгоритм або план виробничої та економічної діяльності.

Сучасне математичне програмування включає лінійне програмування (ЛП), нелінійне програмування (НП) і різні їх модифікації.

В цьому параграфі наведені відомості відносно класифікації задач МП і зокрема задач лінійного програмування, наведені питання існування рішень задач ЛП і теореми властивостей оптимальних рішень цих задач.

Перейдемо до розгляду загальних питань математичного програмування.

У математичному програмуванні використовуються поняття функції і відображення дійсних змінних. Загально поняття функції f задають виразом $f:X\to a$, в якому X деяка множина і $f(X)=a$.

Відображення $F=\begin{cases} f_1 \\ \cdots \\ f_n \end{cases}$ задається виразом $F:X\to A$, у якому $f_i:X\to a_i$, $a_i\in A$. Отже функція ставить у відповідність багатьом значенням множини X одне значення множини A, а відображення ставить у відповідність багатьом значенням множини X – багато значень множини A.

В класі функцій існують *лінійні*, тобто такі для, яких функція f задається виразом лінійної комбінації змінних $f(X)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$, a_i – дійсні числа; нелінійні, якщо, наприклад, $f(X)=a_1f_1(x_1)+a_2f_2(x_2)+\cdots+a_nf_n(x_n)$ і $f_i(x)$ одна із функцій класу $\{x^{\alpha}, e^{x}, \log x, \cos x, \cdots\}$. Серед нелінійних функцій виділяють *квадратичні*, що мають представлення

$$f(X) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_n^2 .$$

В свою чергу в класі нелінійних функцій існують опуклі і не опуклі функції, котрі мають «опуклі» графіки. Наприклад, функції $x^{2k}, k = 1,2,3,\cdots$ – опуклі, тому що будь який графік прямої перетинає графіки $f(x) = x^{2k}$ в не більше як двох точках, а функції $x^{2k+1}, k = 1,2,3,\cdots$ є не опуклими тому, що існують прямі лінії, графіки яких перетинають ці функції у трьох точках.

У загальному вигляді математична постановка екстремальної $(\min|\max)$ задачі полягає у визначенні найбільшого чи найменшого значення *цільової функції* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при умовах, що $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i$ $(I = 1 \,..\, m)$, де f і g_i – задані функції, а b_i – деякі дійсні числа.

Визначення 2.1. Математичний вираз утворений цільовою функцією або їх сукупністю і обмеженнями, які на них накладаються зветься *математичною моделлю* (ММ) економічної задачі.

В залежності від властивостей функцій f і g_i математичне програмування можна розглядати як ряд самостійних дисциплін, що займаються вивченням і розробкою методів рішення певних класів економічних задач.

Насамперед задачі математичного програмування діляться на задачі лінійного та нелінійного програмування. При цьому якщо всі функції f і g_i лінійні, то відповідна задача є *задачею лінійного програмування*. Якщо ж хоча б одна із зазначених функцій нелінійна, то відповідна задача є *задачею нелінійного програмування*, наприклад, якщо визначена функція $f(x) = x^3 + 2x$, тоді екстремальна задача є нелінійною.

Найбільш вивченим розділом математичного програмування є лінійне програмування. В загальному (розгорнутому) вигляді ММ задачі ЛП представляються так:

$$f(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \to ext \tag{2.1}$$

при наступних обмеженнях:

$$\begin{cases} g_1(X) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \cdots \\ g_k(X) = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \ge b_k, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0.$$

В ММ задачі (2.1, 2.2) c_i, a_{ij}, b_j задані постійні величини.

Якщо замість цільової функції у виразі (2.1) фігурує відображення $F(X)$, тоді цей вираз стає складним

$$F(X)=\begin{cases} f_1(X)\to ext, \\ \\ f_m(X)\to ext, \end{cases}$$

і маємо при обмеженнях (2.2) *багато екстремальну модель* задачі математичного програмування, яку також звуть *задачею векторної оптимізації.*

Математичну модель 2.1, 2.2 також можливо представляти у скороченому вигляді:

$$f(X)=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to ext,$$

$$g_j(X)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le | = | \ge b_j,$$

$$x_i \ge 0,\ i=1..k.$$

Тут і в подальшому символ | має зміст «або».

Для вирішення задач лінійного програмування розроблено цілий ряд ефективних методів, алгоритмів і програм.

Серед задач нелінійного програмування найбільш глибоко вивчені *задачі опуклого програмування*. Це задачі, в результаті рішення яких визначається мінімум опуклої (або максимум увігнутої) функції, заданої на опуклій замкнутій множині.

У свою чергу, серед задач опуклого програмування більш докладно досліджені *задачі квадратичного програмування*. В результаті вирішення таких задач потрібно в загальному випадку знайти максимум (чи мінімум) квадратичної функції за умови, що її змінні задовольняють деякій системі лінійних нерівностей або лінійних рівнянь або деякій системі, яка містить як лінійні нерівності, так лінійні рівняння.

Окремими класами задач математичного програмування є задачі ціло-чисельного, параметричного і дрібно-лінійного програмування.

В задачах *ціло-чисельного програмування* невідомі можуть приймати тільки цілі числові значення.

В задачах *параметричного програмування* цільова функція чи функції, що визначають область можливих значень змінних, або те й інше залежать від деяких параметрів.

В задачах *дробово-лінійного програмування* цільова функція являє собою відношення двох лінійних функцій, а функції, що визначають область можливих змін змінних, є лінійними.

У економіці також виділяють окремі класи задач стохастичного і динамічного програмування.

Якщо в цільовій функції або у функціях, що визначають область можливих значень змінних, містяться випадкові величини, тоді така задача відноситься до *задачі стохастичного програмування.*

Задача, процес знаходження рішення якої є багатоетапним, відноситься до *задачі динамічного програмування.*

Для вирішення задач лінійного програмування розроблено цілий ряд ефективних методів, алгоритмів, програм і прикладних програмних комплексів Excel, Maple, MatLab.

Розглянемо властивості задач ЛП і приклади пояснюючі ці властивості.

Як було наведено, математичну модель задачі лінійного програмування у спрощеному загальному вигляді можна представити так:

$$\sum_i c_i x_i \to ext, \tag{2.3}$$

$$\sum_j a_{ij} x_j \begin{cases} \le \\ \ge \\ = \end{cases} b_i, \quad x_i \ge 0. \tag{2.4}$$

Спираючись на модель (2.3, 2.4), дамо декілька визначень.

Визначення. 2.2. Математична модель задачі (в подальшому будемо називати просто задача) лінійного програмування (2.3, 2.4), зветься *загальною задачею.*

Визначення. 2.3. Задача (2.3, 2.4), у якій екстремум $ext = max$ і в виразі (2.4) застосовується нерівність $\le$ зветься *стандартною задачею* лінійного програмування.

Визначення. 2.4. Задача ЛП (2.3, 2.4), у якій $ext = max$ і в виразі (2.4) застосовується рівність $=$ зветься *канонічною (основною) задачею.*

Зауваження. Загальну і стандартну задачі завжди можна звести до основної задачі лінійного програмування.

Дійсно, якщо функція $f \to \min$, тоді змінивши знак у функції мети отримаємо $-f \to \max$, якщо у виразі (2.4) є обмеження із відношеннями $\leq$ або $\geq$, тоді відповідно додаючи або віднімаючи у лівих частинах додатні змінні отримаємо обмеження із знаком =.

Звернемо увагу на те, що введені додатні змінні у моделі свідчать про наявність не використаного ресурсу задачі ЛП.

Розглянемо тепер особливості і поняття розв'язків задачі (2.3, 2.4).

Визначення 2.5. Сукупність значень множини $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, які задовольняють умовам задачі ЛП (2.4), називається її *допустимим розв'язком або планом.*

Визначення. 2.6. Сукупність значень $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ множини $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, які задовольняють задачі ЛП (2.3, 2.4), називають її *оптимальним планом.*

На наступному прикладі дамо пояснення введених понять та методологію зведення задачі ЛП до канонічної.

Приклад 1.1. Нехай задано наступну модель задачі ЛП

$$10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 120, \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 \leq 280, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 240 \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 360 \end{cases}$$

$x_i \geq 0, \; i = 1,2,3,$

необхідно звести її до основного вигляду.

Введемо спочатку чотири додаткові змінні $u_i \geq 0, \; i = 1,2,3,4$ такі, що

$$10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + u_1 = 120, \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 + u_2 = 280, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + u_3 = 240, \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 + u_4 = 360; \end{cases}$$

$x_i \geq 0,\ i = 1,2,3;\ u_i \geq 0,\ i = 1,2,3,4.$

Отже у прикладі, попередню модель приведено до канонічної моделі.

Розглянемо основну задачу лінійного програмування у спрощеному вигляді. Як було зазначено вище, вона полягає у визначенні максимального значення функції

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ при умовах } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1,m}), x_j \geq 0\,(j = \overline{1,n}).$$

Запишемо цю модель у векторній формі, так щоб було необхідно знайти максимум функції

$$F = CX \to \max \tag{2.5}$$

при умовах

$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots + x_n P_n = P_0,$

$$X \geq 0; \tag{2.6}$$

де $C = (c_1; c_2; \ldots; c_n)$, $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$; CX – їх скалярний добуток; $P_1, \ldots, P_n$ і P_0 – m-мірні вектор-стовпці, складені з коефіцієнтів при невідомих і вільних членах системи рівнянь моделі:

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \; P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \; P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \; P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Визначення 2.7. План $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ називається *опорним планом* основної задачі лінійного програмування, якщо система векторів P_j , яка входять до рівнянь (2.5) з невід'ємними коефіцієнтами x_j лінійно незалежна.

Так як вектори P_i є m мірними, то з визначення опорного плану випливає, що число його невід'ємних компонент не може бути більше, ніж m.

Визначення 2.8. Опорний план називається *невиродженим*, якщо він містить рівно m невід'ємних компонент, в іншому випадку він називається *виродженим.*

Властивості основної задачі лінійного програмування (2.5), (2.6) дуже тісно пов'язані з властивостями опуклих множин.

Визначення 2.9. Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – довільні точки евклідова простору E_n. *Опуклою лінійною комбінацією* цих точок називається сума добутків $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n$, де α_i- довільні невід'ємні числа, сума яких дорівнює одиниці, тобто:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ \ \alpha_i \geq 0.$$

Визначення 2.10. Множина називається *опуклою*, якщо разом з будь-якими двома своїми точками вона містить і їх довільну опуклу лінійну комбінацію.

Визначення 2.11. Точка X опуклої множини називається *кутовою*, якщо вона не може бути представлена у вигляді випуклої лінійної комбінації якихось двох інших різних точок даної множини.

Має місце теорема, яку наведемо без доведення [3].

Теорема 2.1. Не порожня множина планів основної задачі лінійного програмування є *опуклою.*

Визначення 2.12. Не порожня множина планів основної задачі лінійного програмування називається *багатокутником рішень*, а всяка кутова точка багатокутника рішень – *вершиною.*

Теорема 2.2. Якщо основна задача лінійного програмування має оптимальний план, тоді максимальне значення цільової функції задачі досягається в одній з вершин багатокутника рішення.

З цієї теореми маємо слідство.

Слідство 2.1. Якщо максимальне значення цільової функції задачі лінійного програмування досягається більш ніж в одній вершині, тоді вона приймає його у всякій точці, що є опуклою лінійною комбінацією цих вершин.

Теорема 2.3. Якщо система векторів $P_1, P_2, \ldots, P_k$, $(k \leq n)$ у представлені (2.5) лінійно незалежна і така, що

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots + x_k P_k = P_0, \tag{2.7}$$

де всі $x_j \geq 0$, тоді точка $X = (x_1, x_2; \ldots; x_k; \; 0; \ldots; 0)$ є вершиною багатокутника рішень.

Теорема 2.4. Якщо $X = (x_1; x_2: \ldots; x_n)$ – вершина, багатокутника рішень. тоді вектори P_j відповідні невід'ємним x_j в представленні (2.5), лінійно незалежні.

Сформульовані теореми дозволяють зробити наступні висновки.

1. Не порожня множина планів основної задачі лінійного програмування утворює опуклий багатокутник.
2. Кожна вершина цього багатокутника визначає опорний план.
3. В одній з вершин багатокутника рішень задачі лінійного програмування значення цільової функції є максимальним (при умові, що функція обмежена зверху на множині планів).
4. Якщо максимальне значення цільової функції приймається у більш ніж в одній вершині, тоді це ж значення вона приймає в будь-яких точках, які утворюють опуклу лінійну комбінацію на даних вершинах.

Введене поняття алгоритму знайомить здобувача знань з основами його визначення, сторонами формування та реалізації, розглянуто питання знаходження характеристичних показників та проблем вирішення алгоритмів. Наведені деякі прийоми алгоритмів рекурсивного обчислення функцій.

1.3. Алгоритм і його представлення. Алгоритм графічного вирішення задач ЛП

В попередніх параграфах було вказано на те, що оптимізаційні задачі, які виникають в економічній предметні області є системними і потребують відповідної структуризації, за якою будуються моделі і вирішення цих задач та дана класифікація моделей і розглянуто деякі особливості та властивості вирішень. Тепер спираючись на отриманні результати, розглянемо алгоритми розв'язання оптимізаційних задач лінійного програмування, до яких в багатьох випадках зводяться економічні задачі. Нижче розглянуто графічні тлумачення лінійних задач та алгоритми аналітичного розв'язання задач ЛП і наведено приклади пошуку рішень економічних задач.

Поняття алгоритму досить важливе в економічній діяльності і у здобутті розв'язків виникаючих задач у цій предметній області. Це поняття виникає природним чином у людини в результаті її діяльності і проявляється різним чином в залежності від обставин, в яких вона знаходиться, від проблем, які вона вирішує, досвіду людини та іншого.

На інтуїтивному рівні під алгоритмом розуміють деяку послідовність дій для досягнення поставленої мети. Але розмитість такого визначення не дає можливості застосовувати його у вирішенні практичних задач, хоча б з того, що невідомо про які дії іде мова та хто є виконавцем дій?

На сучасному рівні інтелекту людини не вдається загально визначити алгоритм, але його можна коректно задати в часткових випадках. Наприклад, якщо задати задачу або її модель, для вирішення якої формується алгоритм, виконавчий механізм (виконавець), оператори-дії, котрі може виконувати цей механізм, тоді визначити алгоритм можна порівняно чітко. Існує велика кількість механізмів для задання алгоритмів, як правило, в теоретичних дослідженнях використовують прості механізми з невеликою кількістю операторів, у практичній інтелектуальній діяльності людина використовує ЕОМ з великою кількістю операторів (декілька сотень операторів).

Алгоритм здобуває, переробляє, зберігає та сприяє передачі інформації і даних вирішення задач. На алгоритм можна дивитися, як на процес за яким відбувається представлення і його реалізація.

Представлення алгоритму може бути задане на деякій метамові або на будь якому:носієві інформації у заданому середовищі програмування, або з застосуванням, в залежності від деталізації, схем програм (блок-схем, схем Нассі тощо).

Реалізація алгоритму виконується людиною або механізмом, який «розуміє» представлення алгоритму.

Характерним для алгоритму A є його універсальність та конструктивність, тобто він сприймається як конструктивний об'єкт, який має вхід X і вихід Y, та має представлення і реалізацію тобто A_X^Y, тому конструктивно формує предметні об'єкти (рішення, функції, процеси тощо), і має директивний напрямок виконання і ін.

Останнє визначення враховує властивість масовості алгоритму, за яким множина $X = Dom\, A_X^Y$ визначає область його визначеності $Dom\, A_X^Y$ і область значень $Run\, A_X^Y$ таку, що $Y = Run\, A_X^Y$. Між областями визначення та значень алгоритму і, наприклад, функції f, для якої розроблено алгоритм, існують включення $X \subseteq Dom\, f(x)$, $Y \subseteq Run\, f(x)$, $x \in X$.

Застосування алгоритмів необхідно для здобуття економічних знань при вирішенні предметних задач. Слід звернути увагу на те, що інколи рішення задачі можна знайти різним чином. за допомогою різних алгоритмів. Звідси виникає необхідність оцінки алгоритмів за часом виконання, за об'ємом використаної пам'яті ЕОМ та інше.

Повернемося до нашої основної задачі побудови алгоритму знаходження оптимальних планів задач лінійного програмування. Розглянемо графічний метод (алгоритми) пошуку рішення задачі ЛП.

Вершину багатокутника рішень, в якій цільова функція приймає максимальне значення, знайти порівняно просто, якщо задача, записана у формі стандартної і містить не більше двох змінних або задача, записана у формі основної, і також містить не більше двох вільних змінних, тобто $n - r \le 2$, де n - число змінних, r- ранг матриці, складеної з коефіцієнтів a_{ij} в системі обмежень моделі задачі ЛП.

Розглянемо процес знаходження рішення задачі, що полягає в знаходженні максимального значення цільової функції

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \qquad (3.1)$$

Кожна з нерівностей цієї системи обмежень задачі (3.1) геометрично визначає півплощину відповідно з граничними прямими $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2=b_i$, $x_1 = 0$ і $x_2 = 0$.

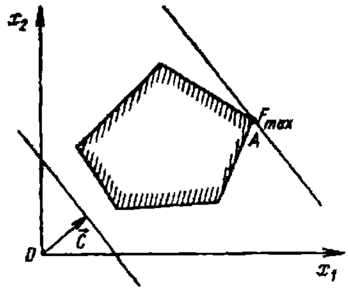
У тому випадку, якщо система нерівностей задачі (3.1), сумісна, областю її рішень є множина точок, що належать усім зазначеним півплощинам. Так як множина точок перетину даних півплощин – опукла, тому областю допустимих рішень задачі (3.1) є опукла множина, яка є багатокутником, рішень (введений раніше термін «багатокутник рішень» зазвичай вживається, якщо $n \ge 3$). Сторони цього багатокутника лежать на прямих, рівняння яких отримаємо з вихідної системи обмежень, замінивши в ній символи нерівностей на символи рівностей.

Таким чином, вихідна задача лінійного програмування полягає в знаходженні такої точки багатокутника рішень, в якій цільова функція F приймає максимальне значення. Ця точка існує тоді, коли багатокутник рішень не порожній і на ньому цільова функція обмежена зверху.

Отже, при вказаних умовах в одній з вершин багатокутника рішень цільова функція приймає максимальне значення.

Для визначення даної вершини побудуємо лінію рівня $c_1x_1+ c_2x_2 = h$ (де h – деяка стала), що проходить через багатокутник рішень, і будемо пересувати її в напрямку вектора $\vec{C} = (c_1, c_2)$ до тих пір, поки вона не пройде через останню її загальну точку з багатокутником рішень.

Координати знайденої точки й визначають оптимальний план розглянутої тут задачі (3.1).



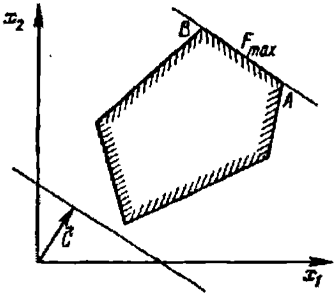


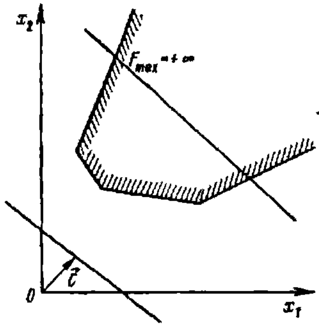
Рис. 1.1 Рис. 1.2

Закінчуючи розгляд геометричній інтерпретації задачі (3.1), відзначимо, що при знаходженні її вирішення можуть зустрітися випадки, зображені на рис. 1.1 – 1.4.

Рис. 1.1 характеризує такий випадок, коли цільова функція приймає максимальне значення в єдиній точці А.

З рис.1.2 видно, що максимальне значення цільова функція приймає в будь-якій точці відрізка АВ.

На рис. 1.3 зображений випадок, коли цільова функція не обмежена зверху на множині її допустимих рішень, а на рис. 1.4 наведено випадок, коли система обмежень задачі несумісна.



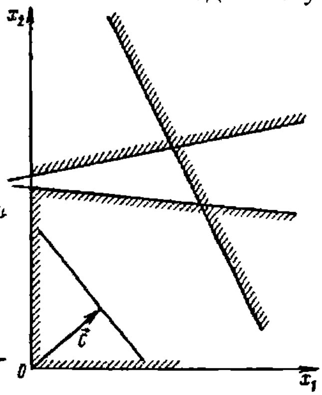


Рис. 1.3 Рис. 1.4

Відзначимо, що знаходження мінімального значення лінійної функції при даній системі обмежень відрізняється від знаходження її максимального значення при тих же обмеженнях лише тим, що лінія рівня $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ пересувається не в напрямку вектора $\vec{C} = (c_1, c_2)$, а в протилежному напрямку.

Таким чином, зазначені вище випадки, які зустрічаються при знаходженні максимального значення цільової функції, мають місце і при визначенні її мінімального значення. Отже, знаходження рішення задачі лінійного програмування (3.1) на основі її геометричній інтерпретації включає наступні етапи алгоритму, схема якого представлено мета мовою (українською).

1. Будуються прямі лінії, рівняння яких отримують в результаті заміни в обмеженнях моделі (3.1) символів нерівностей на символи дорівнює.

2. Знаходять півплощини, що визначаються кожним з обмежень задачі.

3. Знаходяться багатокутник рішень, який утворюється півплощинами обмежень задачі (3.1).

4. Будують вектор оптимального направлення $\vec{C} = (c_1, c_2)$.

5. Будують пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = h$, яка проходить через багатокутник рішень.

6. Пересувають пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ у напрямку вектора $\vec{C}$, в результаті чого або знаходять точку (точки), в якій цільова функція приймає максимальне значення, або встановлюють необмеженість зверху функції мети на множині планів.

7. Визначають координати точки максимуму функції мети і підраховують значення цільової функції в цій точці.

Продемонструємо реалізацію цього алгоритму на вирішені ЛП задачі.

Приклад 3.1. Для виробництва двох видів виробів А і В підприємство використовує три види сировини. Результати структуризації виробництва наведені в таблиці 1.3. Норми витрати сировини кожного виду на виготовлення одиниці продукції даного виду приведені у цій таблиці.. В ній також зазначені прибуток від реалізації одного виробу кожного виду і загальна кількість сировини даного виду, яке може бути використане підприємством.

Таблиця 1.3

Вид сировини	Норми витрат сировини (кг) на один виріб		Загальна кількість сировини (кг)
	A	B	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибуток від реалізації одного виробу (грн)	30	40	

Враховуючи, те що вироби A і B можуть виготовлятися у будь-яких співвідношеннях (збут забезпечений), поставимо задачу: скласти такий план їх випуску, при якому прибуток підприємства від реалізації всіх виробів був би максимальним.

Для вирішення задачі припустимо, що підприємство виготовить x_1 кількість виробів виду A і x_2 – виробів виду B. Оскільки виробництво продукції обмежено наявною в розпорядженні підприємства кількістю сировини кожного виду і кількість виготовлених виробів не може бути від'ємною, тому повинні виконуватися нерівності

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300 \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120 \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0.$

Загальний прибуток від реалізації x_1 виробів виду A і x_2 виробів виду B складає $F=30x_1 +40x_2$. Таким чином, приходимо до наступної математичної задачі: серед всіх невід'ємних рішень даної системи лінійних нерівностей потрібно знайти таке, при якому функція F приймає максимальне значення.

Знайдемо тепер рішення сформульованої задачі за наведеною алгоритмічною схемою, використовуючи її геометричну інтерпретацію. Спочатку визначимо багатокутник рішень.

Для цього в нерівностях системи обмежень і умов невід'ємності змінних знаки нерівностей замінимо на знаки рівностей і знайдемо відповідні прямі:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 = 300 & \text{(I)} \\ 4x_1 + 4x_2 = 120 & \text{(II)} \\ 3x_1 + 12x_2 = 252 & \text{(III)} \\ x_1 = 0 & \text{(IV)} \\ x_2 = 0 & \text{(V)} \end{cases}$$

Ці прямі зображені на рис. 1.5. Кожна з побудованих прямих ділить площину на дві півплощини. Координати точок однієї півплощині задовольняють вихідній нерівності, а іншої – ні. Щоб визначити шукану півплощину, треба взяти якусь точку, що належить одній з півплощин і перевірити, чи задовольняють її координати даній нерівності.

Якщо координати взятої точки задовольняють даній нерівності, тоді шуканою є та півплощина, якій належить ця точка, в іншому випадку – інша півплощина.

Знайдемо, наприклад, півплощину, яка визначається нерівністю $12x_1 + 4x_2 \le 300$. Для цього, побудувавши пряму $12x_1 + 4x_2 = 300$ (на рис.1.5 ця пряма /), візьмемо яку-небудь точку, що належить одній з двох отриманих півплощин, наприклад точку O (0; 0).

Координати цієї точки задовольняють нерівності $12 \cdot 0 + 4 \cdot 0 < 300$; що означає її належність півплощині і визначається нерівністю $12x_1 + 4x_2 \le 300$..

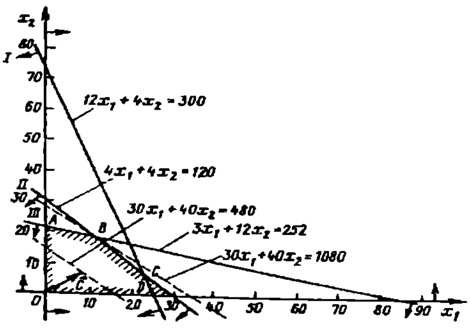


Рис. 1.5

Це і показано стрілками на рис. 1.5.

Перетин отриманих півплощин загалом визначає багатокутник рішень даної задачі.

Як видно з рис. 1.5, багатокутником рішень є п'ятикутник OABC. Координати будь-якої точки, що належить цьому п'ятикутнику, задовольняють даній системі нерівностей і умові невід'ємності змінних. Тому сформульована задача буде вирішена, якщо ми зможемо знайти точку, яка належить п'ятикутнику OABC і в якій функція F приймає максимальне, значення. Щоб знайти вказану точку, побудуємо вектор $\vec{C}=(30,40)$ і пряму $30x_1+40x_2=h$, де h - деяка стала така, що пряма $30x_1+40x_2=h$ має спільні точки з багатокутником рішень. Для цього покладемо, наприклад, h = 480 і побудуємо пряму $30x_1+40x_2=480$ (рис. 1.5).

Якщо тепер взяти якусь точку, що належить побудованій прямий і багатокутнику рішень, то її координати визначають такий план виробництва виробів A і B, при якому прибуток від їх реалізації дорівнює 480 грн.

Далі, вважаючи h рівним деякому числу, більшому ніж 480, ми будемо отримувати різні паралельні прямі. Якщо вони мають спільні точки з багатокутником рішень, то ці точки визначають плани виробництва виробів A і B, при яких прибуток від їх реалізації перевищить 480грн.

Переміщуючи побудовану пряму $30x_1+40x_2=480$ в напрямку вектора $\dot{C}$, бачимо, що останньою її спільною точкою з багатокутником рішень задачі слугує точка B. Координати цієї точки і визначають план випуску виробів A, при якому прибуток від їх реалізації є максимальним.

Знайдемо координати точки B як точки перетину прямих II і III. Отже,

$$\begin{cases} 4x_1+4x_2=120, \\ 3x_1+12x_2=252. \end{cases}$$

із цієї системи знаходиться точка B.

Вирішивши цю систему рівнянь, отримаємо $x_1^*=12$, $x_2^*=18$. Отже, якщо підприємство виготовить 12 виробів виду A і 18 виробів виду B, тоді воно отримає максимальний прибуток, який дорівнює $F=30\cdot12+40\cdot18=1080$ грн.

Введене поняття алгоритму знайомить здобувача знань з основами його визначення, сторонами формування та реалізації, розглянуто питання застосування алгоритму до знаходження оптимального плану задачі лінійного програмування і наведено приклад знаходження розв'язку оптимізаційної задачі графічним методом.

ЛІТЕРАТУРА

Основна

1 Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. Учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов. [Текст]/ И.Л. Акулич - М.: Высшая школа, 1986. – 319 с.

2 Еремин И.И., Астафьев Н.Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. – М.: Наука, 1970. – 132 с.

3 Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математические методы и модели для магистрантов экономики: Учебное пособие. – СПб.: Питер, 2006. – 496 с.

4 Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. – Новосибирск : Наука, 1986. – 256 с.

5 Молчанов А.А. Моделирование и проектирование систем. – К.: Выща шк., 1988. – 359 с.

6 Вітлінський В.В. Математичне програмування: Навч.-метод, посібник для самост. вивч. дисц. [Текст]/ В.В. Вітлінський, С.І. Наконечний, Т.О. Терещенко - К. КНЕУ, 2001. — 248 с.

7 Карманов В. Г. - Математическое программирование. [Текст]/ В. Г. Карманов - М.: Наука, 1986. – 272 с.

8 Ашманов С.А. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. [Текст]/ С.А. Ашманов, А.В. Тихонов – М.: Наука, 1991. – 322 с.

9 Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике. [Текст]/ П.В. Конюховский – СПб: Питер, 2002. – 208 с.

10 Кухарев В.Н. Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении [Текст]/ В.Н. Кухарев, В.И. Салли, А.М. Эрперт – К.: Выща шк., 1991. – 304 с.

11 Поспелов Д. А. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интелекта [Текст] / Под ред. Д. А. Поспелова, М. : Наука, 1986. 312 с.

12 Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств [Текст] / А. Кофман. М. : Радио и связь, 1982. 432 с.

13 Ягера Р. Р. Нечеткие множества и теория. Последние достижения [Текст] / Под ред. Р. Р. Ягера. М. : Радио и связь, 1986. 406 с.

Додаткова

14 Згуровский М.З. Інтегровані системи оптимального керування і проектування. – К.: Выща школа, 1990. – 349 с.

15 Бережная Е.В. Математические методы моделирования экономических систем: Учебное пособие. [Текст]/ Е.В. Бережная, В.И. Бережной – М.: Финансы и статистика, 2002. – 368 с.

16 Ільман В.М. Чутливість і грубість параметричних систем економіки // Тези доповідей XV міжнародної наукової конференції «Проблеми економіки транспорту». – Дніпр. 2017. – 1 с.

17 Олифер А.И. Методические указания к практическим занятиям по курсу «Математические методы оптимизации». [Текст]/ А.И. Олифер – Д.: Диит, 1981. – 48 с.

18 Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами EXCEL [Текст]/ Б.Я. Курицкий – 7. СПб.: БХВ-Петербург, 1997. – 384 с.

19 Комягин В.Б. EXCEL – 7 в примерах. Практическое пособие. [Текст]/ В.Б. Комягин, А.О. Коцюбинский - М.: изд. НОЛИДЖ, 1996. – 432 с.

20 Говорухин В., Цибулин В. Компьютер в математическом исследовании. Учебный курс. – СПб.: Питер, 2001. – 624 с.

21 Скалозуб В.В., Ильман В.М. Прикладной системный анализ интеллектуальных транспортных систем: пособие. – Д.: Изд.-во Днепропетр. нац. ун-та ж.-д. трансп. им. акад. В. Лазаряна, 2013. – 214 с.

22 Лисицин Б. М. Технические средства и математические методы САПР.[Текст] / Б. М. Лисицин, В. И. Кривенко. К. : Вища школа, 1988. 190 с.

23 Малишев Н. Г. Нечеткие модели для экспертных систем в САПР [Текст] / Н. Г. Малишев, Л. С. Берштейн, А. В. Боженюк. : Энергоатомиздат, 1991. 135 с.

24 Орлов А. И. Задачи оптимизации и нечеткие переменные [Текст] / А. И. Орлов. М. : Знание №8, 1980. 53 с.

25 Воронин Ю. А. Начала теории сходства [Текст] / Ю. А. Воронин. Новосибирск : Наука, 1991.

26 Ануфриев И. Е. Самоучитель MatLab 5.3/ 6.x [Текст] / И. Е. Ануфриев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 736 с.

27 Леоненков А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH [Текст] / А. В. Леоненков. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 736 с.

28 Савицька Г. В. Економічний аналіз діяльності підприємства: Навч. Посіб [Текст] / Г. В. Савицька – К.: Знання, 2005. – 662 с.

29 Бережная Е. В. Математические методы моделирования экономических систем: Учебное пособие [Текст] / Е. В. Бережная, В.И. Бережной – М.: Финансы и статистика, 2002. – 368 с.

30 Калмыков С. А. Методы интервального анализа [Текст] / С. А. Калмыков, Ю.И. Шокин, З.Х. Юлдашев. – Новосибирск: Наука, - 1986. 224 с.

Навчальне видання

Ільман Валерій Михайлович
Михайлова Тетяна Федорівна
Самойлов Сергій Петрович
Панік Леонід Олександрович

ОПТИМІЗАЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ

Навчальний посібник
(українською мовою)

ТОВ підприємство «Дріант»
Свідоцтво ДК № 6593 від 28.01.2019р.
проспект С. Нігояна, буд. 55
м. Дніпро,Україна.

Надруковано:
ТОВ підприємство «Дріант»
Здано до друку 10.12.20р. Формат 29,7x42. Папір офсетний.
Лазерний друк. Умов. друк. арк. 30. Наклад 100 прим.
Заказ № 7 від 20.12.20р.

ISBN 978-966-2394-45-0