Основне рівняння гідростатики. Закон Архімеда. Відносна рівновага рідини

1. Основні формули та визначення

Тиск в нерухомій рідині називається *гідростатичним* і характеризується наступними властивостями:

1. Тиск у рідині є напруженням стиску. На зовнішній поверхні рідини напруження стиску (тиск) направлене по нормалі в середину поверхні рідини.

2. В будь-якій точці в середині рідини значення тиску однакове в усіх напрямках, тобто не залежить від кута нахилу площини, по якій він діє.

Стан рідини, що перебуває в стані рівноваги описується диференційним рівнянням:

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz), \tag{2.1}$$

де dp $\left[Па\right]$ – повний диференціал тиску;

X, Y, Z $\left[\frac{м}{c^2}\right]$ – прискорення вздовж осей координат;

dx, dy, dz $\left[м\right]$ – приріст координат.

Якщо на рідину діє тільки одна масова сила – сила тяжіння, тобто $Z = -g$, $X = Y = 0$, то про інтегрувавши рівняння (2,1), отримаємо:

$$z + \frac{p}{\rho g} = const \tag{2.2}$$

де z – геометрична висота, тобто висота будь-якої точки над довільною горизонтальною площиною *О-О*;

$\frac{p}{\rho g}$ – п'єзометрична висота, тобто висота на яку підніметься рідина в трубці (п'єзометрі) під дією тиску p.

Рівняння (2.2) називається *основним рівнянням гідростатики*, суть якого полягає в тому, що для різних точок нерухомої рідини сума геометричної і п'єзометричної висот незмінна (рис. 2.1).

Запишемо рівняння (2.2) у вигляді:

$$z + \frac{p}{\rho g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho g}, \tag{2.3}$$

де z_0, p_0 – вертикальна координата і тиск на вільній поверхні.

Ввівши заміну $h = z_0 - z$, де h – глибина точки, що розглядається, відрахована від поверхні з тиском p_0, отримаємо з рівняння (2.3) другу форму запису основного рівняння гідростатики (рис. 2.1):

$$p = p_0 + h\rho g = p_0 + hj \tag{2.4}$$

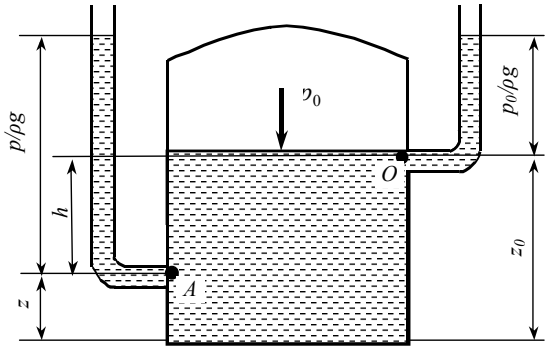

Рис. 2.1.

В тих випадках, коли точка, що розглядається, розміщена вище поверхні з тиском p_0, другий член в формулі (2.4) від'ємний.

З основного рівняння гідростатики, описане формулами (2.2) і (2.4) видно, що тиск, який діє на вільній поверхні рідини передається в усі точки рідини. Це явище називається *законом Паскаля.*

2. Вказівки до вирішення задач

1. При розв'язуванні задач по гідростатиці перш за все необхідно засвоїти і чітко розрізняти такі поняття як тиск p і сила тиску F. Дана практична робота присвячена вирішенню задач на визначення тиску.
2. При вирішенні задач на визначення тиску в тій чи іншій точці нерухомої рідини слід користуватися основним рівнянням гідростатики в формі (2.2) або (2.4).
3. Використовуючи рівняння (2.4) слід мати на увазі, що другий член в правій частині цього рівняння може бути як додатнім, так і від'ємним, що очевидно, адже при збільшенні глибини тиск зростає, а при піднятті – зменшується.
4. Необхідно твердо розрізняти тиск абсолютний, надлишковий і вакуум і обов'язково знати зв'язок між тиском, питомою вагою і висотою, що відповідають цьому тиску.

3. Приклади розв'язку задач

Приклад 1. Обчисліть різницю тисків у резервуарах *A* і *B* (рис. 2.2), заповнених водою. Різниця рівнів ртуті в диференціальному манометрі $h = 50 \quad мм$.

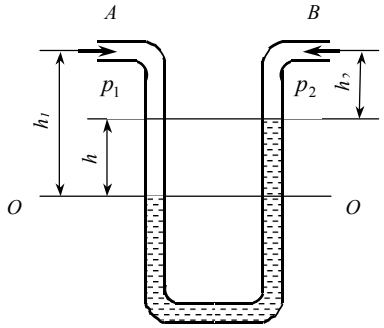

Рис. 2.2.

Дано:

$h = 50 \quad мм = 0,05 \quad м$

$\rho_1 = 1000 \quad \frac{кг}{м^3}$

$\rho_2 = 13600 \quad \frac{кг}{м^3}$

$\Delta p - ?$

Розв'язання:

1. Запишемо основне рівняння гідростатики щодо нижнього рівня *O-O* для лівого коліна :

$$p = p_1 + \rho_1 g h_1 \qquad (1)$$

2. Запишемо основне рівняння гідростатики щодо нижнього рівня *O-O* для правого коліна :

$$p = p_2 + \rho_1 g h_2 + \rho_2 g h \qquad (2)$$

3. Прирівнявши праві частини рівнянь (1) і (2) отримаємо:

$$p_1 + \rho_1 g h_1 = p_2 + \rho_1 g h_2 + \rho_2 g h$$

Звідки

$$\Delta p = p_1 - p_2 = g h (\rho_2 - \rho_1)$$

$$\Delta p = 9,81 \cdot 0,05 \cdot (13600 - 1000) = 6180,3 \quad Па$$

Відповідь: $6180,3 \quad Па$

Приклад 2. Закритий резервуар заповнено водою до висоти $h_2 = 50 \quad см$ а вище – до висоти $h_1 = 30 \quad см$, – маслом з питомою масою $800 \quad \frac{кг}{м^3}$.

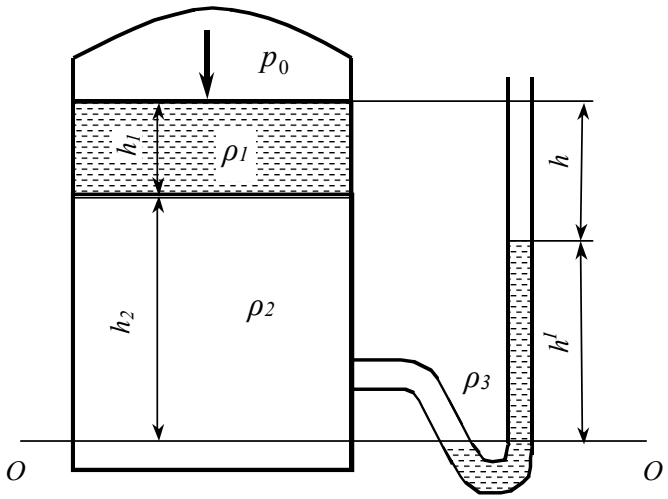

Рис. 2.3

Визначити повний тиск на поверхні масла, якщо рівень ртуті в трубці (рис. 2.3) нижчий від рівня масла в резервуарі на $h = 40 \quad см$.

Розв'язання:

Дано:

$h_2 = 50 \quad см = 0,5 \quad м$

$h_1 = 30 \quad см = 0,3 \quad м$

$h = 40 \quad см = 0,4 \quad м$

$\rho_1 = 800 \quad \frac{кг}{м^3}$

$\rho_2 = 1000 \quad \frac{кг}{м^3}$

$\rho_3 = 13600 \quad \frac{кг}{м^3}$

$g = 9,81 \quad \frac{м}{с^2}$

$p_{атм} = 98100 \quad Па$

$p_0 - ?$

1. Запишемо основне рівняння гідростатики щодо нижнього рівня *O-O* для баку, заповненого водою і маслом :

$$p = p_0 + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 \qquad (1)$$

2. Запишемо основне рівняння гідростатики щодо нижнього рівня *O-O* для трубки з ртуттю:

$$p = p_{атм} + \rho_3 g h' \qquad (2)$$

де $h' = h_1 + h_2 - h$

3. Прирівнявши праві частини рівнянь (1) і (2) отримаємо:

$$p_0 + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 = p_{атм} + \rho_3 g (h_1 + h_2 - h)$$

Звідки

$$p_0 = p_{атм} + \rho_3 g (h_1 + h_2 - h) - \rho_1 g h_1 - \rho_2 g h_2$$

$$p_0 = 98100 + 13600(0,3 + 0,5 - 0,4) - 800 \cdot 9,81 \cdot 0,3 -$$

$$-1000 \cdot 9,81 \cdot 0,5 = 144207 \quad Па$$

Відповідь: $144207 \quad Па$

Приклад 3. Визначити надлишковий тиск в трубі *B*, якщо покази манометра $p_м = 0,025 \quad МПа$ з'єднувальна трубка заповнена водою і повітрям, як показано на рис. 2.4, причому $H_1 = 0,5 \quad м, \quad H_2 = 3 \quad м, \quad H_3 = 5 \quad м$. Як зміняться покази манометра, якщо при тому ж тиску в трубі всю з'єднувальну трубку заповнити водою.

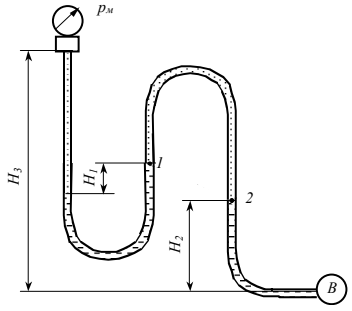

Рис. 2.4.

Розв'язання:

Дано:

$p_м = 0,025 \quad МПа = 25000 \quad Па$

$H_1 = 0,5 \quad м$

$H_2 = 3 \quad м$

$H_3 = 5 \quad м$

$\rho = 1000 \quad \frac{кг}{м^3}$

$g = 9,81 \quad \frac{м}{с^2}$

$p_B - ?$

$p_м - ?$

1. Визначимо тиск в точці *1* рідини:

$p_1 = p_м - \rho g H_1$

2. Тиск з точки *1* передається в точку *2* $p_2 = p_1$. Тиск в трубі *B* визначимо з основного рівняння гідростатики:

$p_B = p_2 + \rho g H_2 = p_м + \rho g (H_2 - H_1)$

$p_B = 25000 + 1000 \cdot 9,81 \cdot (3 - 0,5) =$

$= 49525 \quad Па \approx 0,05 \quad МПа$

3. Визначимо тиск $p_м$ при випущеному повітрі:

$p_м = p_B - \rho g H_3$

$p_м = 49525 - 1000 \cdot 9,81 \cdot 5 = 475 \approx 0 \quad Па$

Відповідь: $0,05 \quad МПа, \quad 0 \quad Па.$

Приклад 4. В U-подібну трубку налито воду і бензин (рис. 2.5). Визначити питому масу бензину, якщо $h_б = 500 \quad мм, \quad h_в = 350 \quad мм.$

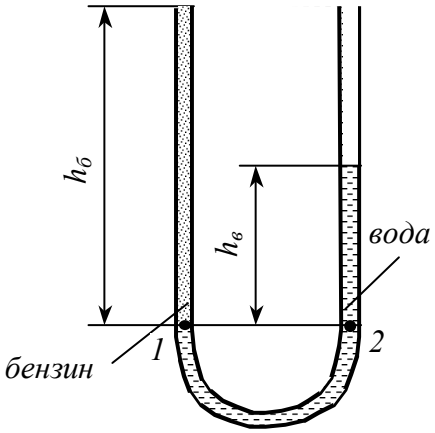

Рис. 2.5.

Розв'язання:

Дано:

$h_б = 500 \quad мм = 0,5 \quad м$

$h_в = 350 \quad мм = 0,35 \quad м$

$\rho_в = 1000 \quad \frac{кг}{м^3}$

$g = 9,81 \frac{м}{с^2}$

$\rho_б - ?$

1. Запишемо основне рівняння гідростатики для точки *1*:

$p_1 = p_{атм} + \rho_б g h_б$

2. Запишемо основне рівняння гідростатики для точки *2*:

$p_2 = p_{атм} + \rho_в g h_в$

3. Так як $p_1 = p_2$, то:

$\rho_б = \rho_в \frac{h_в}{h_б} \qquad \rho_б = 1000 \cdot \frac{0,35}{0,5} = 700 \quad \frac{кг}{м^3}$

Відповідь: $700 \quad \frac{кг}{м^3}$