Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет
Шосткинський інститут

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ КІЛ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
для студентів напряму підготовки 050201 «Системна інженерія»
спеціальності 6.091401 «Системи управління та автоматики»
заочної форм навчання
У п’яти частинах
Частина 4

Затверджено
на засіданні кафедри системотехніки та інформаційних технологгій як конспект лекцій з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл».
Протокол № 1 від 21.10.2009 р.

Суми
Видавництво СумДУ
2010

Теорія електричних та магнітних кіл: конспект лекцій у 5-ти частинах / Укладач А.В. Булашенко. – Суми:Вид-во СумДУ, 2010. – Ч.4. – 181с.

Кафедра системотехніки та інформаційних технологій

Зміст

С.
ВСТУП 7
РОЗДІЛ 1 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ 8
1.1 Електричне коло, електрична схема та їх елементи 8
1.2 Джерела напруги і струму та їх перетворення 9
1.3 Основні поняття, що характеризують електричні схеми .. 11
1.4 Напруга на ділянці кола. Закон Ома для ділянки кола 12
1.5 Закони Кірхгофа 13
1.6 Енергетичний баланс у колах постійного струму 14
1.7 Потенціальна діаграма 15
1.8 Метод контурних струмів 15
Відповідно до позначень система (1.21) набуває вигляду 17
1.10 Еквівалентні перетворення гілок 21
1.11 Основні властивості електричних кіл постійного струму 21
1.11.1 Поняття вхідних і взаємних провідностей 21
1.11.2 Принцип взаємності 22
1.11.3 Теорема компенсації 22
1.11.4 Принцип накладання і метод накладання 22
1.11.5 Принцип лінійності 23
1.12 Перетворення зірки опорів у еквівалентний трикутник .. 24
1.14 Умова максимальної передачі енергії 28
1.15 Передача енергії по лініям передачі 29
РОЗДІЛ 2 СИНУСОЇДНИЙ СТРУМ 31
2.1 Основні величини, що характеризують змінний струм 31
2.2 Синусоїдальний струм активного опору 33
2.3 Синусоїдний струм індуктивності 34
2.4 Синусоїдний струм ємності 35
2.5 Метод розрахунку кіл синусоїдного струму 37
2.6 Потужність в колах синусоїдного струму 39
2.7 Використання комплексних чисел для розрахунку електричних кіл 40

2.8 Дії з комплексними числами 42
2.9 Символічний метод розрахунку кіл змінного струму 44
2.10 Закони Ома і Кірхгофа в комплексній формі 44
2.11 Комплексна провідність 46
2.12 Баланс потужностей у складних колах змінного струму 47
2.13 Векторні й топографічні діаграми 48
2.14 Умови передачі максимальної потужності від активного двополюсника до навантаження 49
2.15 Резонанс у послідовному коливальному контурі 50
2.16 Резонанс у паралельному коливальному контурі 53
2.17 Практичне застосування резонансу 56
РОЗДІЛ 3 ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ 58
3.1 Основні поняття і класифікація 58
3.2 Основні рівняння чотириполюсника 59
3.3 Визначення коефіцієнтів пасивного чотириполюсника 62
3.3.1 Визначення коефіцієнтів шляхом розрахунку 62
3.3.2 Дослідний шлях визначення коефіцієнтів чотириполюсника 64
3.4 Схеми заміщення пасивного чотириполюсника 66
3.5 Годографи (кругові та лінійні діаграми) 68
3.5.1 Лінійні діаграми 68
3.5.2 Кругові діаграми 70
3.5.3 Кругова діаграма струму для двох послідовно з'єднаних опорів 71
РОЗДІЛ 4 ТРИФАЗНІ КОЛ 73
4.1 Основні поняття і визначення 73
4.2 Аналіз основних схем з'єднання трифазних кіл 75
4.2.1 З'єднання обмоток генератора зіркою 75
4.2.2 З'єднання обмоток генератора трикутником 76
4.2.3 З'єднання обмоток генератора та трифазного навантаження за типом "зірка-зірка" 77
4.2.4 З'єднання обмоток генератора і трифазного навантаження за типом "трикутник-трикутник", "зірка-трикутник" 78
4.3 Розрахунок трифазних кіл 79
4.3.1 Коло "зірка-зірка" 79

4.3.2 Кола “трикутник-трикутник” і “зірка-трикутник” 82
4.4 Аварійні режими в трифазних колах 85
4.4.1 Схема "зірка-зірка" 85
4.4.2 Схема "зірка-трикутник" 87
РОЗДІЛ 5 КОЛА ІЗ ВЗАЄМНОЮ ІНДУКТИВНІСТЮ 89
5.1 Поняття взаємної індуктивності 89
5.2 Розрахунок електричних кіл за наявності в них індуктивно зв’язаних котушок 91
5.3 Визначення взаємної індуктивності 92
Розділ 6 НЕСИНУСОЇДАЛЬНІ СТРУМИ 94
6.1 Розкладання періодичної функції в тригонометричний ряд 94
6.2 Амплітудне, середнє та діюче значення періодичних несинусоїдальних функцій 96
6.3 Коефіцієнти, що характеризують форму несинусоїдальних періодичних функцій 98
6.4 Потужність періодичних несинусоїдальних струмів 99
6.5 Огинаючи несинусоїдальних періодичних функцій 100
6.5.1 Биття 100
6.5.2 Модуляція 101
6.6 Резонансні явища у колах з несинусоїдальними джерелами 102
6.7 Методика розрахунків кіл з несинусоїдальними джерелами 103
РОЗІЛ 7 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ У ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ 106
7.1 Поняття про перехідні процеси 106
7.2 Закони комутації 107
7.3 Початкові умови 110
7.4 Комутації при зміні струму стрибком 110
7.5 Вигляд коренів диференціального рівняння 112
7.6 Характеристики перехідного процесу 113
7.7 Класичний метод розрахунку перехідних процесів 115
7.7.1 Загальні положення 115
7.7.2 Коротке замикання RL-кола 116
7.7.3 Ввімкнення RL-кола під постійну напругу 117

7.7.3 Розрив RL-кола 119
7.7.4 Включення RC-кола під постійну напругу 120
7.7.5 Включення RC-кола під змінну напругу 122
7.7.6 Розряд конденсатора у RLC-колі 125
7.7.7 Включення RLC-кола під постійну напругу 129
7.7.8 Розрахунки перехідних процесів у розгалуженому колі 131
7.8 Метод зміних стану 141
7.9 Застосування інтеграла Дюамеля 144
7.10 Операторный метод аналізу перехідних процесів 147
7.10.1 Загальні положення 147
7.10.2 Основні теореми перетворення Лапласа 149
7.10.3 Розрахунки кіл операторним методом 149
7.11 Спектральний метод аналізу перехідних процесів 153
7.11.1 Загальні положення 153
7.11.2 Методика розрахунку частотним методом 155
7.12 Передача сигналів через чотириполюсні кола 158
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ 160
ДОДАТОК А 163
ДОДАТОК Б 173

ВСТУП

Теорія електричних та магнітних кіл (ТЕМК) - дисципліна, що займається питаннями розрахунку та вивчення явищ, які характеризуються поняттями електричних струмів, напруг, потужностей, магнітних потоків, а також поняттями напруженості електричного та індукцією магнітного полів.

Метою дисципліни є оволодіння фундаментальними поняттями, теорією та методологією сучасної теоретичної електротехніки, засвоєння фундаментальних знань, які є необхідною базою для подальшого вивчення електротехнічних дисциплін.

Завдання дисципліни:

- навчити основним законам електричних, магнітних і електромагнітних кіл та співвідношенням між електричними величинами в електричних та магнітних колах;
- ознайомити зі структурними елементами й фізичними величинами кіл;
- навчити теорії і методології аналізу електричних кіл постійного та змінного (синусоїдного і несинусоїдного) струмів;
- навчити теорії і методології аналізу симетричних і несиметричних трифазних кіл із синусоїдними й несинусоїдними джерелами енергії;
- навчити теорії і методології аналізу перехідних процесів в електричних колах із зосередженими параметрами;
- ознайомити з основними законами і методами розрахунку нелінійних кіл постійного та змінного струму.

Предметом вивчення дисципліни є основні закони теорії електричних та магнітних кіл та оволодіння навичками їх практичного застосування для дослідження і розрахунків сучасних електротехнічних пристроїв.

Конспект лекцій з курсу «ТЕМК» складається з п’яти частин. Перші три частини призначені для студентів денної форми навчання, а четверта та п’ята для студентів заочної форми навчання. Ми зупинимося на четвертій частині.

РОЗДІЛ 1 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

1.1 Електричне коло, електрична схема та їх елементи

Електричне коло – сукупність пристроїв, призначених для передачі, розподілу і взаємного перетворення електромагнітної та інших видів енергії та інформації, якщо процеси, що відбуваються у пристроях, можуть бути описані за допомогою понять про електрорушійну силу (ЕРС), струм та напругу.

Основні елементи електричного кола:

- джерела електричної енергії – пристрої, що перетворюють механічну, теплову, хімічну та інші види енергії в електромагнітну (генератор, акумуляторна батарея та ін.);

- перетворювачі електромагнітної енергії (трансформатори, перетворювачі частоти та ін.);

- пристрої передачі електромагнітної енергії (лінії передачі);

- споживачі електромагнітної енергії, що перетворюють електромагнітну енергію в механічну, теплову, хімічну та інші види (двигуни, лампи розжарювання, резистори та ін.).

Кожна група - це безліч різних приладів, що відрізняються за принципом дії, конструкцією тощо.

Іншими словами, *електричне коло* – сукупність джерел та споживачів електромагнітної енергії, з'єднаних проводами, по яких може проходити електричний струм.

Кола, в яких процеси отримання електричної енергії в джерелах, передача та перетворення в споживачах відбуваються при незмінних у часі струмах та напругах, називаються *колами постійного струму*.

У курсі ТЕМК електричне коло замінюють моделлю (графічним зображенням), яка називається *електричною схемою*. Елементами електричної схеми є *активні* й *пасивні* елементи.

До пасивних елементів (аналог споживачів електромагнітної енергії) відносять, умовне позначення яких подане на рис.1.1:

- опір, [Ом] - ідеалізований елемент, що приблизно замінює резистор, в якому відбувається перетворення електричної енергії в теплову;

- ємність, [Ф] - ідеалізований елемент, який приблизно замінює конденсатор, в якому накопичується енергія електричного поля;

- індуктивність [Гн] - ідеалізований елемент, який приблизно замінює котушку індуктивності, в якій може накопичуватися енергія магнітного поля.

До активних елементів (аналог джерел електромагнітної енергії) відносять джерела електрорушійної сили та джерела струму.

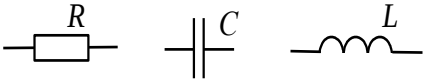


Рисунок 1.1 - Умовні позначення елементів

1.2 Джерела напруги і струму та їх перетворення

Джерела енергії є причиною виникнення струмів і напруг в електричних колах. Для аналізу електричних кіл використовують поняття ідеалізованих джерел напруги та струму.

Під ідеалізованим *джерелом напруги* розуміють таке джерело, напруга на затискачах якого не залежить від струму, що проходить через нього і, яке характеризують тільки електрорушійною силою E (рис.1.2,а). Якщо джерело напруги не ідеалізоване, то воно має внутрішній опір R_0, тому напруга на затискачах залежить від величини струму, що проходить через нього (рис.1.2,б; де m_U, m_I - масштаби по напрузі та струму вольтамперної характеристики джерела).

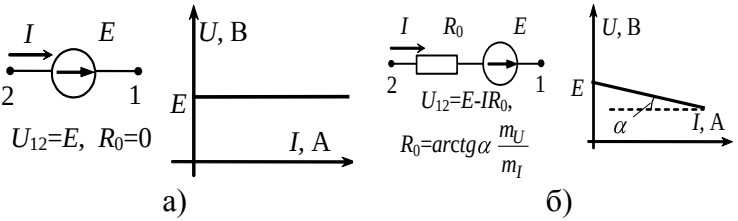


Рисунок 1.2

Під ідеалізованим *джерелом струму* розуміють таке джерело енергії, сила струму якого j не залежить від навантаження, до якого це джерело під'єднане (внутрішній опір такого джерела $R_0 \to \infty$). Умовне позначення ідеалізованого джерела струму та його вольт-амперна характеристика (ВАХ) подана на рис.1.3.

Фізично виконати ідеалізовані джерела струму та напруги неможливо.

При розрахунку електричних кіл реальне джерело напруги з ЕРС E_0 та внутрішнім опором R_0, що з'єднане з навантаженням, може бути представлено двома способами (рис.1.4,а і рис.1.4,б). Ці схеми еквівалентні щодо потужності, яка споживається навантаженням, і нееквівалентні щодо потужності, яка споживається внутрішнім опором R_0. Для схеми рис.1.4, а:

$$E = U_{\text{н}} + I_{\text{н}} \cdot R_0; \tag{1.1}$$

$$\frac{E}{R_0} = \frac{U_{\text{н}}}{R_0} + I_{\text{н}}. \tag{1.2}$$

Позначимо: $\frac{E}{R_0} = j$ і $\frac{U_{\text{н}}}{R_0} = I_0$.

З урахуванням (1.3):

$$j = I_0 + I_{\text{н}}, \tag{1.4}$$

а цьому рівнянню відповідає схема рис.1.4, б. Формула

$$\frac{E}{R_0} = j \tag{1.5}$$

застосовується для переходу від реального джерела напруги до реального джерела струму (і навпаки).

У відношенні енергії, що споживається внутрішнім опором R_0, ці схеми нееквівалентні, тобто для рис.1.4,а - $P_0 = I_{\text{н}}^2 \cdot R_0$, а

для рис.1.4, б - $P_0 = I_0^2 \cdot R_0$. Потужність, що споживається опором навантаження $R_н$, для обох схем однакова:

$$P_н = I_н^2 \cdot R_н. \qquad (1.6)$$

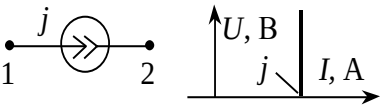
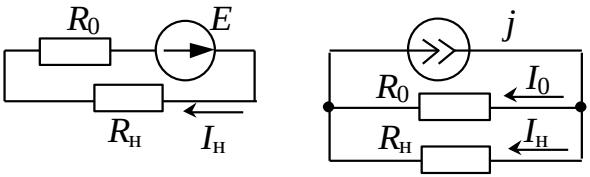


Рисунок 1.3



а) б)

Рисунок 1.4

1.3 Основні поняття, що характеризують електричні схеми

Лінійні електричні кола – кола, всі елементи яких лінійні (резистор, ємність, індуктивність), тобто мають лінійні вольт-амперні характеристики. Якщо коло має хоча б один нелінійний елемент (діод, стабілітрон, лампа розжарювання та ін.) – то воно *нелінійне*.

Основними поняттями, що характеризують електричні схеми є *вітка, вузол, контур*.

Вітка – ділянка кола, вздовж якої проходить один і той самий струм; утворюється вітка кількома послідовно з'єднаними елементами.

Вузол – точка на схемі, де з'єднуються три і більше вітки. *Вітки*, приєднані до одних і тих самих вузлів, називаються паралельними.

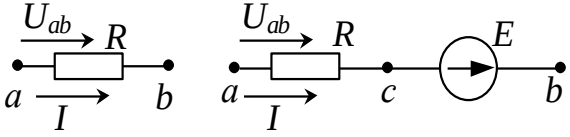
Контур – будь-який замкнутий шлях, що проходить по декількох вітках.

Розгалуженим колом називається коло, що має три і більше вітки, два і більше вузлів.

Нерозгалуженим колом називається коло, що має тільки один контур (не має вузлів).

1.4 Напруга на ділянці кола. Закон Ома для ділянки кола

Напруга на ділянці кола – це різниця потенціалів точок (φ) між крайніми точками цієї ділянки.



а) б)

Рисунок 1.5

За визначенням

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b \ . \tag{1.7}$$

При проходженні через опір R струму I : $\varphi_a > \varphi_b$ на величину падіння напруги в опорі R, тобто

$$\varphi_a = \varphi_b + I \cdot R, \tag{1.8}$$

або

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = I \cdot R, \tag{1.9}$$

Таким чином, закон Ома для ділянки кола, що не має у своєму складі ЕРС (рис.1.5, а):

$$\boldsymbol{I = \frac{U_{ab}}{R}} \ . \tag{1.10}$$

Розглянемо ділянку кола, що має у своєму складі ЕРС (рис.1.5,б). Для цього кола справедливими будуть вирази:

$$\left.\begin{aligned} U_{ab} &= \varphi_a - \varphi_b \\ \varphi_a &= \varphi_c + I \cdot R \\ \varphi_c &= \varphi_b - E \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi_a - \varphi_b = \varphi_c + I \cdot R - \varphi_c - E.$$

З попереднього виразу $U_{ab} = I \cdot R - E$.

Таким чином, закон Ома для ділянки кола, що має у своєму складі ЕРС (рис.1.5, б) має вигляд:

$$I = \frac{U_{ab} + E}{R}. \qquad (1.13)$$

Якщо ділянка кола має у своєму складі кілька ЕРС, спрямованих у різні сторони, а також кілька опорів, то закон Ома матиме вигляд:

$$I = \frac{U_{ab} \pm E_i}{\sum R_i}. \qquad (1.14)$$

Примітка: коли напрямки ЕРС E_i і напруги U_{ab} збігаються з напрямком струму I в ділянці «*ab*», то в чисельнику беремо E_i і напругу U_{ab} зі знаками "+", і навпаки.

1.5 Закони Кірхгофа

Перший закон Кірхгофа виражає закон збереження заряду: алгебраїчна сума струмів віток, що сходяться у вузлі, в будь-який момент часу дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0, \qquad (1.15)$$

де k – номери віток, які зв'язані з даним вузлом. Якщо струм спрямований до вузла, то він входить у рівняння (1.15) зі знаком "+".

Другий закон Кірхгофа виражає закон збереження енергії: алгебраїчна сума напруг ділянок замкнутого контура дорівнює нулю в будь-який момент часу:

$$\sum_{i=1}^{m} U_i = 0, \qquad (1.16)$$

де i – номер ділянки, що входить у контур.

Частіше використовують інше формулювання другого закону Кірхгофа: алгебраїчна сума падінь напруг уздовж контуру дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС вздовж цього ж контура (знаки ЕРС або падінь напруг залежать від їх напрямків і обраних напрямків обходу контурів).

За першим законом Кірхгофа для схеми треба складати n-1 рівнянь, де n – кількість вузлів у схемі.

За другим законом Кірхгофа треба складати $(m\text{-}n+1)$ рівнянь, де m – кількість віток у схемі з невідомими струмами (якщо вітка містить джерело струму, то струм цієї вітки відомий). Отже, система рівнянь за законами Кірхгофа повинна мати стільки рівнянь, скільки невідомих струмів (віток).

Розглянемо приклад складання системи рівнянь за законами Кірхгофа для схеми (рис.1.6):

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 + j = 0, \\ I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 = E_2 - E_1 - E_3, \\ -I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot (R_3 + R_4) = E_3. \end{cases} \qquad (1.17)$$

Порядок розрахунку струмів схеми за законами Кірхгофа.

1. Визначаємо кількість вузлів і віток у схемі, а отже, кількість рівнянь за першим і другим законами Кірхгофа.

2. Довільно вибираємо напрямки струмів у вітках і напрямки обходу контурів.

3. Складаємо і вирішуємо систему відносно невідомих струмів.

1.6 Енергетичний баланс у колах постійного струму

На підставі закону збереження енергії кількість тепла, що виділяється в опорах схеми, повинна дорівнювати енергії, яка постачається за той самий час джерелами енергії, тобто потужність джерел енергії (напруги і струму) дорівнює потужності, що споживається опорами схеми:

$$\sum_{i=1}^{k} (\pm E_i \cdot I_i) + \sum_{i=1}^{p} J_i \cdot U_{ab} = \sum_{i=1}^{l} I_i^2 \cdot R_i , \qquad (1.18)$$

де k - кількість *ЕРС* у схемі; p – кількість джерел струму у схемі; l – кількість опорів у схемі;

U_{ab} – напруга між умовною точкою a, куди проходить струм джерела струму J_i, та умовною точкою b, звідки струм цього джерела струму проходить.

Правило складання балансу: якщо напрямок джерела ЕРС $\boldsymbol{E_i}$ і напрямок струму $\boldsymbol{I_i}$, що проходить через нього, збігаються, то додаток $\boldsymbol{E_i \cdot I_i}$ беремо зі знаком "+", навпаки - зі знаком "-".

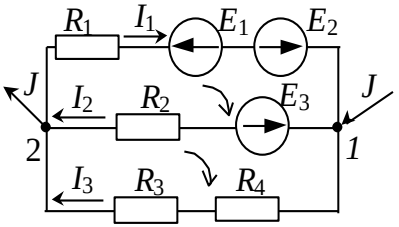


Рисунок 1.6

Приклад складання балансу для схеми рис.1.6:

$$-E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_1 - E_3 \cdot I_2 + J \cdot U_{12} = . \\ = I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot (R_3 + R_4). \qquad (1.19)$$

1.7 Потенціальна діаграма

Потенціальна діаграма – це графік розподілу потенціалу вздовж замкнутого контура або ділянки кола. По осі абсцис відкладають опори вздовж контура один за одним, починаючи від довільно обраної точки, потенціал беруть такими, що дорівнюють нулю.

По осі ординат відкладають потенціали точок контура.

Приклад побудування діаграми (рис.1.7):

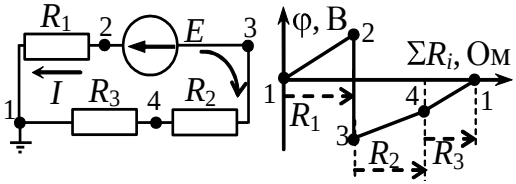


Рисунок 1.7

$$I = E / (R_1 + R_2 + R_3); \ \varphi_1 = 0; \ \varphi_2 = \varphi_1 + I \cdot R_1; \\ \varphi_3 = \varphi_2 - E; \ \varphi_4 = \varphi_3 + I \cdot R_2; \ \varphi_1 = \varphi_4 + I \cdot R_3 = 0.$$

1.8 Метод контурних струмів

Метод застосовується для розрахунку кіл будь-якої складності й дозволяє зменшити кількість рівнянь, що треба було б

скласти за законами Кірхгофа, а саме з m до m-n+1, де n – кількість вузлів, а m – кількість віток у схемі.

Відповідно до цього методу роблять припущення, що в кожному *незалежному* контурі проходить свій *контурний* струм (*незалежний* контур – це контур, що містить хоча б одну вітку, яка не входить в інші контури).

Кількість рівнянь, що треба скласти за методом, дорівнюється кількості незалежних контурів, або числу рівнянь за другим законом Кірхгофа. Струми віток визначають за допомогою контурних струмів.

Потрібно мати на увазі, що контурний струм – це зручне, але умовне розрахункове поняття, фізично існують лише струми віток.

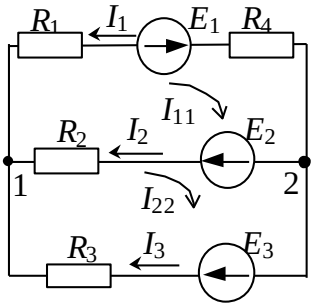


Рисунок 1.8

Розглянемо схему рис.1.8, у якій довільно задамося напрямками струмів у вітках I_1, I_2, I_3 і напрямками контурних струмів I_{11}, I_{22} (за годинниковою стрілкою). Складаємо систему за другим законом Кірхгофа.

$$\begin{cases} I_{11}\cdot R_1 + I_{11}\cdot R_4 + I_{11}\cdot R_2 - I_{22}\cdot R_2 = E_1 + E_2, \\ I_{22}\cdot R_3 + I_{22}\cdot R_2 - I_{11}\cdot R_2 = E_3 - E_2, \end{cases} \qquad (1.20)$$

або

$$\begin{cases} I_{11}\cdot (R_1 + R_4 + R_2) - I_{22}\cdot R_2 = E_1 + E_2, \\ -I_{11}\cdot R_2 + I_{22}\cdot (R_2 + R_3) = E_3 - E_2. \end{cases} \qquad (1.21)$$

Позначимо:

$R_{11} = R_1 + R_4 + R_2$ - власний опір першого контура, дорівнює сумі усіх опорів, які належать контуру;

$R_{22} = R_2 + R_3$ - власний опір другого контура, дорівнює сумі усіх опорів, які належать контуру;

$R_{12} = R_{21} = -R_2$ - взаємний опір першого та другого контурів, дорівнює опору, що належить обом контурам, у даному випадку - зі знаком "-";

$E_{11} = E_1 + E_2$; $E_{22} = E_3 - E_2$ - власні ЕРС першого та друго-

го контурів, які дорівнюють алгебраїчній сумі усіх ЕРС, які належать першому та другому контурам відповідно (знак "+" перед ЕРС E_i означає, що напрямок цієї ЕРС збігається з обраним напрямком відповідного контурного струму).

Примітка: при користуванні цим методом контурні струми зручно направляти однаково (наприклад, за годинниковою стрілкою); тоді опори з однаковими індексами (R_{11}, R_{22} і т. д.) - додатні, а з різними (R_{12}, R_{23} і т. д.) - від'ємні.

Відповідно до позначень система (1.21) набуває вигляду

$$\begin{cases} I_{11} \cdot R_{11} - I_{22} \cdot R_{12} = E_{11}, \\ -I_{11} \cdot R_{21} + I_{22} \cdot R_{22} = E_{22.} \end{cases} \qquad (1.22)$$

Після того, як з системи знаходять значення контурних струмів (у даному випадку - I_{11} і I_{22}), визначають значення струмів віток:

$$I_1 = -I_{11}; \;\; I_2 = I_{11} - I_{22}; \; I_3 = I_{22} \;\; .$$

Якщо в колі є джерело струму, ввімкнене в деяку вітку, один з контурних струмів стає відомим (дорівнює струму джерела струму з відповідним знаком), тоді кількість рівнянь скорочується на одиницю.

Якщо схема має три незалежних контурів, то система містить три рівняння:

$$\begin{cases} I_{11} \cdot R_{11} + I_{22} \cdot R_{12} + I_{33} \cdot R_{13} = E_{11}, \\ I_{11} \cdot R_{21} + I_{22} \cdot R_{22} + I_{33} \cdot R_{23} = E_{22}, \\ I_{11} \cdot R_{31} + I_{22} \cdot R_{32} + I_{33} \cdot R_{33} = E_{33.} \end{cases} \qquad (1.24)$$

і загальне рішення системи має вигляд:

$$\begin{aligned} I_{11} &= E_{11} \cdot \frac{\Delta_{11}}{\Delta} + E_{22} \cdot \frac{\Delta_{12}}{\Delta} + E_{33} \cdot \frac{\Delta_{13}}{\Delta}, \\ I_{22} &= E_{11} \cdot \frac{\Delta_{21}}{\Delta} + E_{22} \cdot \frac{\Delta_{22}}{\Delta} + E_{33} \cdot \frac{\Delta_{23}}{\Delta}, \\ I_{11} &= E_{11} \cdot \frac{\Delta_{31}}{\Delta} + E_{22} \cdot \frac{\Delta_{32}}{\Delta} + E_{33} \cdot \frac{\Delta_{33}}{\Delta}, \end{aligned} \qquad (1.25)$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}$ - головний визначник системи (1.25);

$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} R_{22} & R_{23} \\ R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}$ - алгебраїчне доповнення, що отримують з головного визначника системи шляхом викреслювання першого стовпця і першого рядка та помноження отриманого результату на $(-1)^{1+1}$;

$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} R_{12} & R_{13} \\ R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}$ - алгебраїчне доповнення, що отримують з головного визначника системи шляхом викреслювання першого стовпця і другого рядка та помноження отриманого результату на $(-1)^{1+2}$ і т. ін.

1.9 Метод вузлових потенціалів

Це метод розрахунку електричних кіл, відповідно до якого за невідомі беруться потенціали вузлів, після визначення яких можна знайти струм будь-якої вітки із законом Ома. Врахуємо, що завжди можна один з вузлів схеми «заземлити» (потенціал його прийняти рівним нулю), тому система рівнянь для визначення інших невідомих потенціалів вузлів повинна мати *n*-1 рівнянь.

У основі методу – закони Ома та перший закон Кірхгофа. Розглянемо схему рис.1.9, в якій «заземлюємо» вузол 3: $\varphi_3 = 0$.

За першим законом Кірхгофа для вузла 1 та за законом Ома для віток 1, 2, 3:

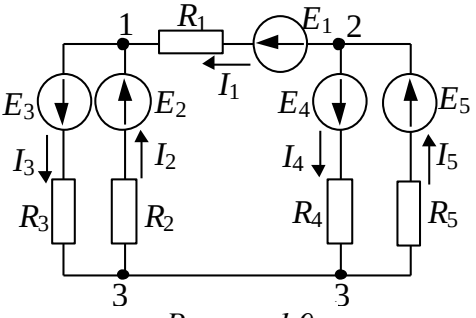


Рисунок 1.9

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0. \tag{1.26}$$

$$I_1 = (\varphi_2 - \varphi_1 + E_1) \cdot G_1. \tag{1.27}$$

$$I_2 = (-\varphi_1 + E_2) \cdot G_2. \tag{1.28}$$

$$I_3 = (\varphi_1 + E_3) \cdot G_3, \tag{1.29}$$

де $G_1 = \frac{1}{R_1}, G_2 = \frac{1}{R_2}, G_3 = \frac{1}{R_3}$ - провідності віток.

Підставимо (1.27), (1.28), (1.29) у (1.26). Отримуємо:

$$\varphi_1 \cdot (G_1 + G_2 + G_3) - \varphi_2 \cdot G_1 = E_2 \cdot G_2 + E_1 \cdot G_1 - E_3 \cdot G_3. \tag{1.30}$$

Якщо скористатися аналогічними міркуваннями для вузла 2, то

$$\begin{aligned} -\varphi_1 \cdot G_1 + \varphi_2 \cdot (G_1 + G_3 + G_4) = \\ = -E_1 \cdot G_1 - E_4 \cdot G_4 + E_5 \cdot G_5. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Позначимо:

$G_{11} = G_1 + G_2 + G_3$ - власна провідність вузла 1 дорівнює сумі провідностей усіх віток, що приєднані до вузла 1;

$G_{22} = G_1 + G_4 + G_5$ - власна провідність вузла 2 дорівнює сумі провідностей усіх віток, що приєднані до вузла 2;

$G_{12} = G_{21} = 1/R_1$ - взаємна провідність вузлів 1 і 2, дорівнює сумі провідностей усіх віток, що напряму поєднують ці вузли.

$I_{11} = E_1 \cdot G_1 + E_2 \cdot G_2 - E_3 \cdot G_3$, $I_{22} = -E_1 \cdot G_1 - E_4 \cdot G_4 + E_5 \cdot G_5$; - вузлові струми відповідно першого та другого вузлів; добуток $E_i \cdot G_i$ беремо зі знаком "+", якщо ЕРС E_i спрямована до вузла, відносно якого визначається вузловий струм.

З урахуванням введених коефіцієнтів (1.30) і (1.31) набувають вигляду

$$\begin{cases} \varphi_1 \cdot G_{11} - \varphi_2 \cdot G_{12} = I_{11}, \\ -\varphi_1 \cdot G_{21} + \varphi_2 \cdot G_{22} = I_{22}. \end{cases} \tag{1.32}$$

Після визначення із системи (1.32) потенціалів вузлів φ_1 та φ_2

знаходимо струми I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 за рівняннями (1.27)÷ (1.29), а також за рівняннями (1.33)÷ (1.34):

$$I_4 = (\varphi_2 + E_4) \cdot G_4, \tag{1.33}$$

$$I_5 = (-\varphi_2 + E_5) \cdot G_5. \tag{1.34}$$

Деякі особливості застосування методу.

Припустимо, що в схемі рис.1.9 у вітці, де проходить струм I_5 немає опору R_5, тоді $\varphi_2 = E_5$ і достатньо тільки одного рівняння з системи (1.32) – першого.

Коли у схемі два вузли - також потрібне лише одне рівняння для визначення потенціалу одного з вузлів. Так, для схеми рис.1.8, якщо $\varphi_2 = 0$, то

$$\varphi_1 \cdot (G_1 + G_2 + G_3) = -E_1 \cdot G_1 + E_2 \cdot G_2 + E_3 \cdot G_3. \tag{1.35}$$

Враховуючи, що $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_1$, отримуємо вираз для напруги між вузлами 1 і 2:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{-E_1 \cdot G_1 + E_2 \cdot G_2 + E_3 \cdot G_3}{(G_1 + G_2 + G_3)}. \tag{1.36}$$

Останнє рівняння є основою *методу двох вузлів*, що застосовується для знаходження струмів у схемах, подібних розглянутій (після визначення напруги між двома вузлами струми віток визначають за законом Ома).

Порядок розрахунку за методом вузлових потенціалів:

1. Довільно направляємо струми в вітках кола.

2. Складаємо систему рівнянь за методом, що містить *n*-1 рівнянь. Один з вузлів «заземлюємо».

3. Визначаємо власні і взаємні провідності вузлів та вузлові струми.

4. Вирішуємо систему (визначаємо потенціали вузлів кола).

5. За законом Ома визначаємо струми віток.

1.10 Еквівалентні перетворення гілок

Припустимо, що ділянки схем рис.1.10,а і рис.1.10,б еквівалентні щодо струму I і потенціалів вузлів a, b. Тоді рівняння для $G_{екв}$ і $E_{екв}$ (отримують за законами Кірхгофа для вузла a і за законом Ома для ділянок кола) мають вигляд:

$$E_{екв} = \frac{E_1 \cdot G_1 + E_2 \cdot G_2 + E_3 \cdot G_3}{G_1 + G_2 + G_3}; \qquad (1.37)$$

$$G_{екв} = G_1 + G_2 + G_3. \qquad (1.38)$$

Якщо деяка ЕРС E_i спрямована у протилежну сторону, ніж $E_{екв}$, то у чисельнику правої частини рівняння (1.37) добуток $E_i \cdot G_i$ беремо зі знаком «-».

Якщо між вузлами a і b також ввімкнене джерело струму j, то у чисельник правої частини рівняння (1.37) додаємо «+j» (якщо струм джерела струму j втікає в вузол a), або «-j» (якщо струм джерела струму j витікає з вузла a).

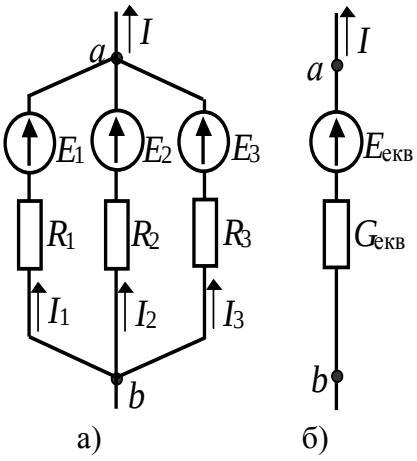


Рисунок 1.10

1.11 Основні властивості електричних кіл постійного струму

1.11.1 Поняття вхідних і взаємних провідностей

Вхідна провідність - відношення струму однієї вітки (вітка має номер n) до ЕРС цієї ж вітки за умови закорочення ЕРС в інших вітках (позначення – G_{nn}).

Взаємна провідність - відношення струму однієї вітки (вітка має номер n) до ЕРС іншої вітки (вітка має номер m) за умови закорочення ЕРС в інших вітках (позначення – G_{nm}). Визна-

чають вхідні та взаємні провідності розрахунковим і експериментальним шляхом. З поняттям вхідної провідності зв'язане поняття вхідного опору (відношення ЕРС однієї вітки до струму цієї ж вітки за умови закорочення ЕРС в інших вітках). Так вхідний опір вітки *n:*

$$R_{вхпп} = \frac{E_n}{I_n} = \frac{1}{G_{nn}}. \qquad (1.39)$$

1.11.2 Принцип взаємності

Для будь-якого лінійного кола струм I_k у *k*-й вітці, який викликаний *ЕРС* E_m, що знаходиться в *m*-й вітці, $I_k = E_m \cdot G_{km}$, буде дорівнювати струму I_m в *m*-й вітці, що викликаний ЕРС E_k, яка знаходиться в *k*-й вітці за умови, що E_k=E_m чисельно. Принцип доводиться з рівності $G_{mk} = G_{km}$ і E_k=E_m. Тобто : $I_m = E_k \cdot G_{mk}$, $I_k = E_m \cdot G_{km}$, а отже, $I_k = I_m$.

1.11.3 Теорема компенсації

У будь-якому електричному колі без зміни струморозподілу в ньому опір зі струмом, що проходить в ньому, може бути замінений на ЕРС, що дорівнює падінню напруги на опорі ($E = I \cdot R$) і спрямована назустріч струму в цьому опорі (рис.1.11).

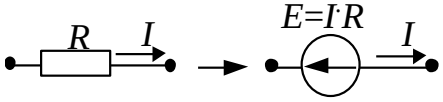


Рисунок 1.11

1.11.4 Принцип накладання і метод накладання

Принцип накладання: струм у будь-якій вітці лінійного електричного кола буде дорівнювати алгебраїчній сумі струмів (так звані часткові струми), що викликані кожною з ЕРС окремо. Випливає принцип з лінійності рівнянь, що отримані на основі законів Кірхгофа для кіл з постійними параметрами.

Наприклад, для схеми рис.1.12 струм I_1:

$$I_1 = I_1^{/} + I_1^{//} + I_1^{///}, \qquad (1.40)$$

де $I_1^{/}$ - частковий струм першої вітки, що викликаний тільки ЕРС E_1; $I_1^{//}$ - частковий струм першої вітки, що викликаний тільки ЕРС E_2; $I_1^{///}$ - частковий струм першої вітки, що викликаний тільки ЕРС E_3 (на кожному етапі інші ЕРС треба закорочувати).

З принципу накладення випливає метод накладання.

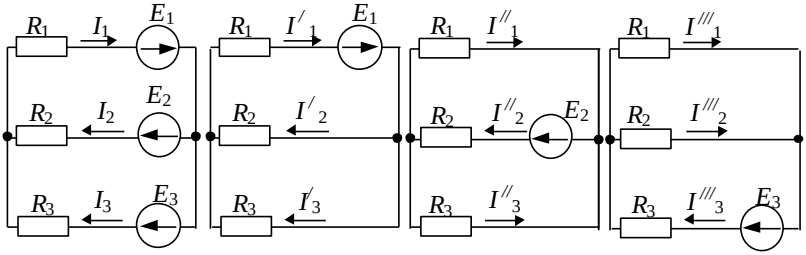


Рисунок 1.12

Порядок розрахунку за методом накладання

1. Довільно направляємо струми у вітках.

2. Розраховуємо часткові струми від дії кожної ЕРС чи кожного джерела струму окремо. При цьому треба закорочувати інші джерела напруги та розмикати джерела струму (враховуємо також, що не треба закорочувати внутрішній опір джерела напруги, якщо останній заданий).

3. Алгебраїчно підсумовуємо часткові струми, орієнтуючись при цьому на обрані напрямки струмів у вихідній схемі.

Примітка: частковими струмами не можна користуватися при розрахунку потужностей –

$$I_1^2 \cdot R_1 \neq I_1^{/2} \cdot R_1 + I_1^{//2} \cdot R_1 + I_1^{///2} \cdot R_1 .$$

1.11.5 Принцип лінійності

Якщо в лінійному колі змінюється ЕРС або опір в якій-небудь одній вітці, то дві будь-які величини (струми і напруги) двох будь-яких віток пов'язані один з одним лінійними залежностями виду: $y = a + b \cdot x$. Тобто, якщо у схемі рис.1.12 зміню-

ється E_3 ($0 \le E_3 \le \infty$), то можна довести, що струми I_1 і I_2 зв'язані залежністю

$$I_1 = a + b \cdot I_2 . \qquad (1.41)$$

1.12 Перетворення зірки опорів у еквівалентний трикутник

Зіркою опорів називається таке з'єднання трьох опорів, при якому всі початки опорів, з'єднані в одну точку (рис.1.13,а), трикутником опорів називається таке з'єднання трьох опорів, при якому початок одного опору з'єднується з кінцем іншого (рис.1.13,б).

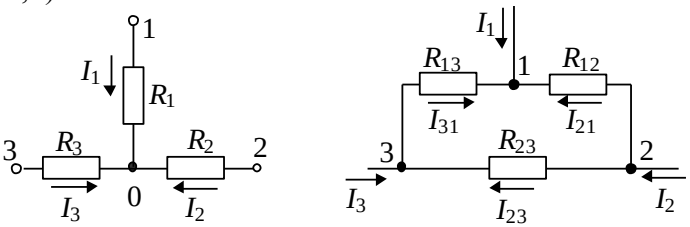


Рисунок 1.10

Схеми рис.1.13,а і рис.1.13,б еквівалентні у відношенні струмів I_1, I_2, I_3 та потенціалів вузлів 1, 2 і 3, якщо виконуються такі співвідношення:

$$R_{12} = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{G_1 \cdot G_2} = \frac{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3}{1/R_1 \cdot 1/R_2} = \qquad (1.42)$$

$$= R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3};$$

$$R_{13} = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{G_1 \cdot G_3} = \frac{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3}{1/R_1 \cdot 1/R_3} = \qquad (1.43)$$

$$= R_1 + R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2};$$

$$R_{23} = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{G_2 \cdot G_3} = \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_2} \cdot \frac{1}{R_3}} = \tag{1.44}$$

$$= R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1};$$

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}; \tag{1.45}$$

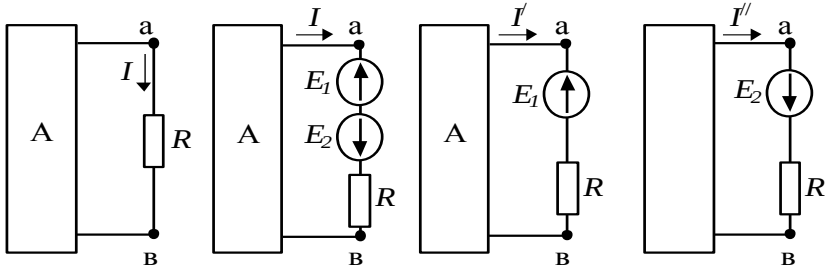
$$R_2 = \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}; \tag{1.46}$$

$$R_3 = \frac{R_{13} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}. \tag{1.47}$$

Формули (1.42) ÷ (1.44) застосовують для переходу від зірки опорів до трикутника, а (1.45) ÷ (1.47) - для переходу від трикутника опорів до зірки опорів.

1.13 Метод еквівалентного генератора

У будь-якій електричний схемі завжди можна виділити яку-небудь вітку, а всю частину схеми, що залишилася, незалежно від її складності, умовно позначити прямокутником з двома вихідними затискачами (рис.1.14,а). По відношенню до виділеної вітки ця частина схеми, що залишилася, є *двополюсником*.



а) б) в) г)

Рисунок 1.14

Таким чином, *двополюсник* - це узагальнена назва схеми, що двома своїми вихідними затискачами приєднується до виділеної вітки. Двополюсники бувають активними (якщо мають у своєму складі хоча б одне джерело енергії) та пасивними (якщо не мають у своєму складі джерел енергії).

Теорема про *еквівалентний генератор*: будь-який активний двополюсник по відношенню до виділеної вітки можна замінити еквівалентним джерелом напруги, ЕРС якого дорівнює напрузі холостої ходи, а внутрішній опір - вхідному опору двополюсника.

Доведення: У вітку "ав" ввімкнемо дві рівні, але протилежно спрямовані ЕРС E_1 та E_2 (рис.1.14,б). Відповідно до принципу накладання

$$I = I^{/} + I^{//}, \tag{1.48}$$

де $I^{/}$ - частковий струм вітки з опором R, що викликаний ЕРС E_1 і всіма джерелами ЕРС та джерелами струму активного двополюсника; $I^{//}$ - частковий струм, що викликаний тільки джерелом ЕРС E_2 (E_2=E_1).

За законом Ома

$$I^{/} = \frac{U_{ав} - E_1}{R}. \tag{1.49}$$

Виберемо E_1 таким чином, щоб $I^{/} = 0$, тобто - це режим холостої ходи (вітка "ав" - розімкнута), тоді - $E_1 = E_2 = U_{ав} = U_{авхх}$, а $I = I^{//} = \frac{E_2}{R + R_{вх}}$, або

$$I = \frac{U_{авхх}}{R + R_{вх}}, \tag{1.50}$$

де $U_{авхх}$ - напруга холостого ходу на розімкнутих затискачах "ав"; $R_{вх}$ - вхідний опір двополюсника відносно вхідних затискачів; R - опір вітки "ав".

Сукупність ЕРС $E_2 = U_{авхх}$ і внутрішнього опору $R_{вх}$ можна розглядати як еквівалентний генератор з ЕРС, що дорівнює

$U_{авхх}$, і внутрішнім опором, що дорівнює $R_{вх}$. Формула (1.50) відповідає схемі рис.1.15. Теорема доведена.

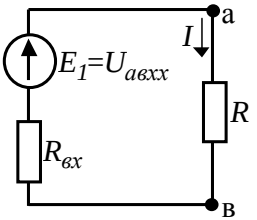


Рисунок 1.15

Використовують теорему для розрахунку струму в одній вітці електричного кола, цей метод розрахунку за розглянутою теоремою має назви:

- ✓ еквівалентного генератора;
- ✓ активного двополюсника;
- ✓ холостого ходу та короткого замикання.

Порядок розрахунку за методом:

1. "Виривають" опір у тій вітці, де треба визначити струм.

2. Визначають $R_{вх}$, при цьому закорочують усі ЕРС (якщо у джерела напруги заданий внутрішній опір, то його не закорочують), і розривають всі джерела струму.

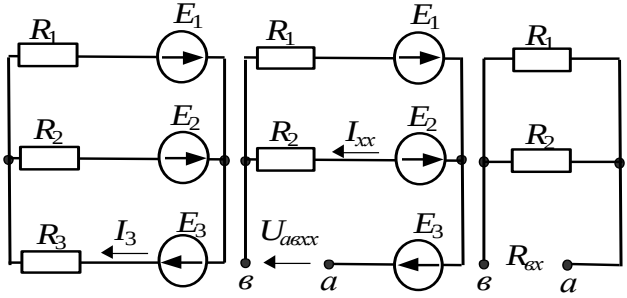
3. Визначають напругу холостого ходу на розімкнутих затискачах $U_{хх}$.

4. За формулою (1.50) визначають струм.

Приклад розрахунку для схеми (рис.1.16,а) за методом наведений нижче:

$$I_3 = \frac{U_{авхх}}{R_3 + R_{вх}};\ U_{авхх} = E_2 + I_{хх} \cdot R_{вх} + E_3;$$

$$I_{хх} = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} - \text{рис.1.16,б};\ R_{вх} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} - \text{рис.1.16,г}.$$



а) б) г)

Рисунок 1.16

1.14 Умова максимальної передачі енергії

Нехай навантаження $R_н$ підімкнуте до активного двополюсника (рис.1.14,а), $R_н = R$, $I_н = I$; $R_{вх} = const$, а $0 \le R_н \le \infty$.

Знайдемо, при якому співвідношенні опорів $R_{вх}$ та $R_н$ буде передаватися максимальна потужність від активного двополюсника навантаженню:

$$P_н = I_н^2 \cdot R_н, \tag{1.51}$$

$$I_н = \frac{U_{авхх}}{R_н + R_{вх}}. \tag{1.52}$$

Отже

$$P_н = \frac{U_{авхх}^2}{(R_н + R_{вх})^2} \cdot R_н. \tag{1.53}$$

Для знаходження максимуму функції $P_н = f(R_н)$ треба взяти похідну виразу (1.53) й дорівняти її до нуля:

$$\frac{dP_н}{dR_н} = \frac{U_{авхх}^2 \cdot (R_н + R_{вх})^2 - 2 \cdot (R_н + R_{вх}) \cdot R_н}{(R_н + R_{вх})^4} = 0. \tag{1.54}$$

Звідки,

$$(R_н + R_{вх})^2 - 2 \cdot (R_н + R_{вх}) \cdot R_н = 0; \tag{1.55}$$

$$R_{вх}^2 - R_н^2 = 0; \quad \text{або} \quad R_{вх} = R_н. \tag{1.56}$$

Оскільки друга похідна $\frac{d^2 P_н}{dR_н^2} < 0$, то умова $R_{вх} = R_н$ відповідає саме максимуму функції $P_н = f(R_н)$.

Підставимо (1.56) в (1.53) і отримаємо максимальну потужність, яка може виділитися в навантаженні:

$$P_{н\max} = \frac{U_{авхх}^2}{4 \cdot R_н}. \tag{1.57}$$

Коефіцієнт корисної дії (К.К.Д., η) при $R_{вх} = R_н$:

$$\eta = \frac{P_н}{P_{полн}} = \frac{U^2_{авхх} \cdot R_н}{(R_н + R_{вх})^2 \cdot U_{авхх} \cdot I} = \\ = \frac{U^2_{авхх} \cdot R_н \cdot (R_н + R_{вх})}{(R_н + R_{вх})^2 \cdot U^2_{авхх}} = \frac{R_н}{(R_н + R_{вх})}, \quad (1.58)$$

де $P_{полн} = U_{авхх} \cdot I = \frac{U^2_{авхх}}{(R_н + R_{вх})}$ - повна потужність, що виробляється еквівалентним генератором.

Таким чином, $\eta = 0{,}5$, якщо $R_{вх} = R_н$. При $R_н > R_{вх}$ - $\eta > 0{,}5$.

Висновок: якщо потужність $P_н$ значна, то працювати з таким низьким К.К.Д. ($\eta = 0{,}5$) неприпустимо. Але якщо $P_н$ мала (наприклад, потужність різних датчиків пристроїв автоматики), то такий низький К.К.Д. вважають задовільним, оскільки при цьому віддається максимально можлива активна потужність навантаженню.

Узгодження навантаження – вибір величини навантаження $R_н$ рівним $R_{вх}$ активного двополюсника.

1.15 Передача енергії по лініям передачі

Спрощена схема передачі електричної енергії зображена на рис.1.17.

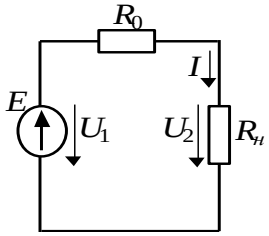


Рисунок 1.17

На схемі позначено:
U_1 –напруга генератора на початку лінії;
U_2 - напруга на навантаженні (кінець лінії); $R_н$ - навантаження наприкінці лінії;
R_0 - опір проводів.

У реальних лініях передач $\eta = 0{,}94 \div 0{,}97$, тому U_2 усього на кілька процентів відрізняється від U_1.

Побудуємо криві (рис.1.18), які повністю характеризують режим роботи лінії, при U_1=*const*:

1. $P_1 = U_1 \cdot I$ - потужність генератора;
2. $U_2 = U_1 - I \cdot R_0$ - напруга на навантаженні;
3. $P_2 = P_1 - I^2 \cdot R_0 = U_1 \cdot I - I^2 \cdot R_0 = I \cdot (U_1 - I \cdot R_0)$ - потужність у навантаженні;

4. Визначимо ККД

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{U_1 \cdot I - I^2 \cdot R_0}{U_1 \cdot I} = 1 - \frac{I \cdot R_0}{U_1} = \frac{I^2 \cdot R_н}{(R_0 + R_н) \cdot I^2} = \frac{R_н}{R_0 + R_н}.$$

При $P_2 = const$ з підвищенням U_2 можна зменшити значення струму I і тому втрати у проводах $P_{пр}$ знижуються, що дозволяє зменшити переріз проводів:

$$P_{пр} = R_0 \cdot I^2 = \rho \cdot \frac{l_{пр}}{S_{пр}} \cdot \left(\frac{P_2}{U_2} \right)^2, \qquad (1.59)$$

де $l_{пр}, S_{пр}$ - довжина та перетин проводів.

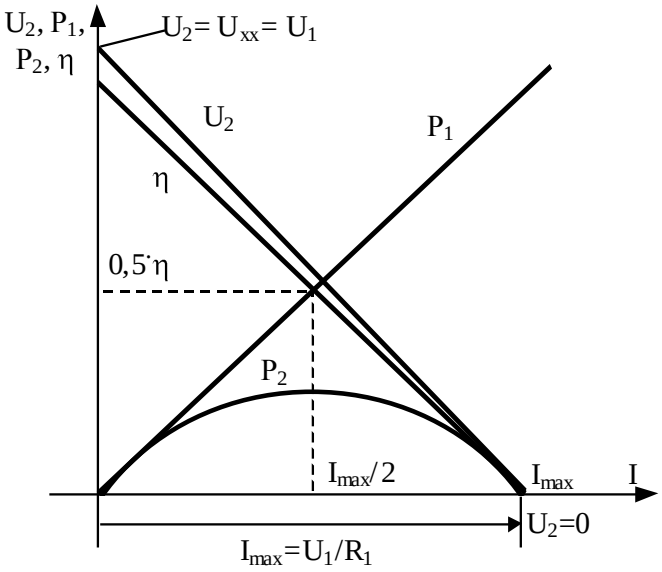


Рисунок 1.18

РОЗДІЛ 2 СИНУСОЇДНИЙ СТРУМ

2.1 Основні величини, що характеризують змінний струм

Струм, що змінюється за законом синуса, називається *синусоїдним* (рис.2.1). Миттєве значення такого струму:

$$i = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = I_m \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \varphi) = \\ = I_m \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi\right), \qquad (2.1)$$

де I_m – амплітудне, тобто максимальне значення струму, А; φ – початкова фаза, визначає величину зсуву синусоїди відносно нуля (якщо $\varphi > 0$ синусоїда зсунута вліво, а якщо $\varphi < 0$ синусоїда зсунута вправо), градуси; Т – період, тобто час, за який відбувається одне повне коливання, с; f – частота коливань, тобто кількість коливань за секунду, 1/с=Гц; ω - кутова частота, $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$, рад/с; $(\omega \cdot t + \varphi)$ – фаза, аргумент синуса, характеризує стан коливання.

Якщо у синусоїдних величин однієї частоти однакові початкові фази, то говорять, що такі синусоїдні величини збігаються за фазою; якщо різниця фаз між синусоїдними функціями становить $\pm\pi$, то говорять, що ці функції знаходяться у протифазі, якщо різниця фаз між синусоїдними функціями становить $\pm\pi/2$, то говорять, що ці функції знаходяться у квадратурі.

Синусоїдні струми відносно низьких частот отримують за допомогою синхронних генераторів, а синусоїдні струми високої частоти (більш десятків кілогерц) - за допомогою напівпровідникових генераторів.

На рис. 2.1 показана крива миттєвого значення струму (так звана хвильова діаграма), коли $\varphi > 0$.

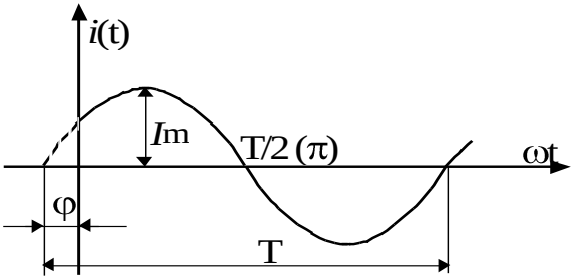


Рисунок 2.1

Синусоїдна величина характеризується значеннями:

- миттєвим,
- амплітудним,
- середнім,
- діючим.

Середнє значення синусоїдної величини – це її середнє значення за половину періоду:

$$I_{ср} = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} I_m \cdot \sin\omega t \, \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\cdot I_m \ , \ I_{ср} \approx 0{,}638 \cdot I_m . \qquad (2.2)$$

Діюче значення синусоїдного струму чисельно дорівнює значенню постійного струму, який за час, що дорівнює періоду T, викликає виділення такої кількості тепла в провіднику з опором R, що і синусоїдний струм за той самий час T. Діючий струм називають ще *ефективним* або *середньоквадратичним*.

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 \cdot \sin\omega t \, \mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \cdot \sin^2 \omega t \, \mathrm{d}t} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \cdot I_m \ . \qquad (2.3)$$

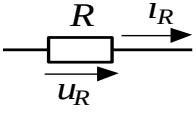
Коефіцієнти, що характеризують синусоїдну функцію:

- коефіцієнт амплітуди $k_a = \dfrac{I_m}{I} = \sqrt{2}$;

- коефіцієнт форми $k_ф = \dfrac{I}{I_{ср}} = \dfrac{I_m/\sqrt{2}}{2/\pi \cdot I_m} = \dfrac{\pi}{2\cdot\sqrt{2}}$.

2.2 Синусоїдальний струм активного опору

Взагалі активний опір на змінному струмі $R_{\sim}$ є більшим, ніж активний опір на постійному струмі R_{-}, внаслідок явищ концентрації струму в поверхневих шарах провідника (поверхневий ефект) і ефекту близькості.



Але будемо вважати, що $R_{\sim} = R_{-}$.
Нехай по активному опору проходить синусоїдний струм $i = I_m \cdot \sin \omega t$.

Рисунок 2.2

За законом Ома:

$$u_R = i \cdot R = I_m \cdot R \cdot \sin \omega t = U_m \cdot \sin \omega t, \qquad (2.4)$$

де U_m - амплітудне значення напруги на активному опорі

$$U_m = I_m \cdot R \qquad (2.5)$$

З виразу (2.4) видно, що струм і напруга на активному опорі збігаються за фазою (різниця фаз між напругою і струмом дорівнює нулю: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$) - рис.2.3.

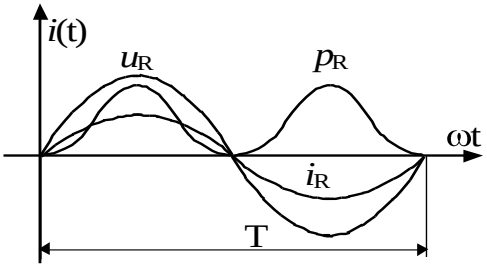


Рисунок 2.3

Миттєва, активна потужність активного опору:

1) Швидкість надходження енергії від джерел характеризується потужністю. *Миттєва потужність* - добуток миттєвої напруги на ділянці кола на миттєвий струм. Для активного опору:

$$p_R = u_R \cdot i_R = U_m \cdot I_m \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\omega t) = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot (1 - \cos 2 \cdot \omega t). \qquad (2.6)$$

Таким чином бачимо, що миттєва потужність має постійну

складову - $\frac{U_m \cdot I_m}{2}$, та змінну складову - $\frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega t)$. Миттєва потужність в активному опорі має тільки позитивне значення і частоту в 2 рази більшу, ніж частота синусоїдного струму.

Активна потужність - це середнє значення миттєвої потужності за період:

$$P_R = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^{2 \cdot \pi} p_R \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot 2 \cdot \pi = \\ = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} = U \cdot I = I^2 \cdot R. \qquad (2.7)$$

2.3 Синусоїдний струм індуктивності

Будь-яка обвитка (котушка) має індуктивність і активний опір. На схемі котушку позначають так, як показано на рис.2.4. Як відомо, *індуктивність* – це елемент схеми заміщення, який дозволяє врахувати при розрахунках явища самоіндукції і накопичування енергії магнітного поля.

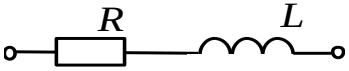


Рисунок 2.4

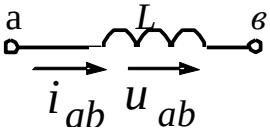


Рисунок 2.5

Виділимо з схеми рис.2.2 тільки одну індуктивність – рис. 2.5. Нехай по активному опору проходить синусоїдний струм: $i = I_m \cdot \sin \omega t$. У котушці наводиться ЕРС:

$$e_L = -L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\omega \cdot L \cdot I_m \cos(\omega t) = -\omega \cdot L \cdot I_m \sin(\omega t + 90^\circ). \qquad (2.8)$$

Позитивний напрямок ЕРС збігається зі струмом, а напруга на індуктивності:

$$u_L = \varphi_a - \varphi_b = -e_L = L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \\ = \omega \cdot L \cdot I_m \cdot \sin(\omega t + 90^\circ) = U_{mL} \cdot \sin(\omega t + 90^\circ), \qquad (2.9)$$

де $U_{mL} = I_m \cdot \omega \cdot L = I_m \cdot X_L$.- амплітудне значення напруги на індуктивному опорі; (2.10)

$X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L$ - індуктивний опір, Ом. (2.11)

З виразу (2.9) бачимо, що напруга в індуктивності випереджає струм на 90° (різниця фаз між напругою і струмом $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 90^\circ$). Тобто, якщо $u_L = 0$, то $i_L = \max$ (рис. 2.6).

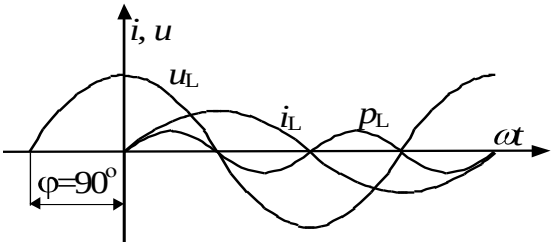


Рисунок 2.6

Миттєва потужність індуктивності:

$$p_L = u_L \cdot i_L = U_{mL} \cdot I_m \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot \sin(2 \cdot \omega t). \quad (2.12)$$

Миттєва потужність індуктивності може мати позитивний знак, тоді індуктивність накопичує енергію, що береться з джерела, і від'ємний знак, тоді індуктивність віддає енергію в джерело.

Активна потужність індуктивності – середнє значення миттєвої потужності за період:

$$P_L = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^{2 \cdot \pi} p_L \, dt = 0. \quad (2.13)$$

2.4 Синусоїдний струм ємності

Ємність (рис.2.7) як елемент схеми заміщення дозволяє врахувати явища зарядки конденсатора і накопичування енергії електричного поля.

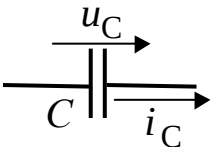


Рисунок 2.7

Якщо

$$u_C = const, \text{ то } i_C = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = 0. \qquad (2.14)$$

Якщо

$$u_C = U_m \cdot \sin(\omega t), \text{ то } q = C \cdot u_C = C \cdot U_m \cdot \sin(\omega t). \qquad (2.15)$$

і конденсатор періодично перезаряджається, що супроводжується проходженням через нього зарядного струму:

$$i_C = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C \cdot \frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(C \cdot U_{mC} \cdot \sin(\omega t))}{\mathrm{d}t} = \omega \cdot C \cdot U_{mC} \cdot \cos(\omega t) =$$

$$= \frac{1}{X_C} \cdot U_{mC} \cdot \sin(\omega t + 90^\circ) = U_{mC} \cdot \sin(\omega t + 90^\circ),$$

Звідси, одержуємо

$$i_C = U_{mC} \cdot \sin(\omega t + 90^\circ), \qquad (2.16)$$

де $U_{mC} = I_m \cdot \dfrac{1}{\omega \cdot C} = I_m \cdot X_C$ - амплітудне значення напруги на ємності, (2.17)

$X_C = \dfrac{1}{\omega \cdot C} = \dfrac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$ - ємнісний опір, Ом. (2.18)

З (2.14) і (2.16) ми бачимо, що струм ємності випереджає напругу на ній на 90° (різниця фаз між напругою і струмом дорівнює $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -90^\circ$) - рис. 2.8. Тобто, якщо $u_C = 0$, то $i_C = \max$ - див рис.2.8.

Миттєва потужність ємності (може мати позитивний і від'ємний знаки):

$$p_C = u_C \cdot i_C = U_{mC} \cdot I_m \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) =$$

$$= \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot \sin 2 \cdot \omega t. \qquad (2.19)$$

Активна потужність ємності:

$$P_C = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^{2 \cdot \pi} p_C \, \mathrm{d}t = 0. \qquad (2.20)$$

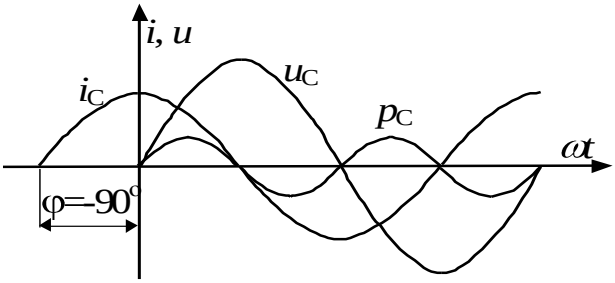


Рисунок 2.8

2.5 Метод розрахунку кіл синусоїдного струму

Розглянемо послідовне з'єднання активного опору, ємності, індуктивності (рис.2.9). Нехай до кола прикладена синусоїдна напруга $u_C = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$. У колі проходить синусоїдний струм - $i = I_m \cdot \sin \omega t$.

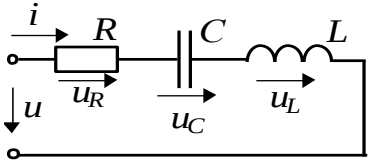


Рисунок 2.7

Нехай до кола прикладена синусоїдна напруга

$$u_C = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi).$$

У колі проходить синусоїдний струм - $i = I_m \cdot \sin \omega t$.

За другим законом Кірхгофа для миттєвих значень

$$u = u_R + u_C + u_L. \qquad (2.21)$$

З урахуванням раніше розглянутого

$$u = I_m R \sin(\omega t) - I_m X_C \cos(\omega t) + I_m X_L \cos(\omega t), \qquad (2.22)$$

або

$$U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) = I_m \cdot (R \cdot \sin(\omega t) + \cdot \cos(\omega t) \cdot (X_L - X_C)). \qquad (2.23)$$

Позначимо

$$X = X_L - X_C \text{ - реактивний опір кола.} \qquad (2.24)$$

Тоді,

$$R \cdot \sin(\omega t) + X \cdot \cos(\omega t) = \sqrt{R^2 + X^2} \cdot \sin(\omega t + \varphi) = Z \cdot \sin(\omega t + \varphi), \qquad (2.25)$$

де

$\varphi = arctg\dfrac{X}{R}$ - кут зсуву фаз між напругою *u* і струмом *i*; (2.26)

$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ - модуль повного опора кола. (2.27)

Отже вираз (2.23) можна записати:

$U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) = I_m \cdot Z \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, (2.28)

або $U_m = I_m \cdot Z$. (2.29)

Розглянемо схему рис.2.10 – паралельне з'єднання трьох елементів – активного опора, ємності й індуктивності.

$u_C = U_m \cdot \sin(\omega t)$, $i = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ - напруга та струм на вході кола.

Перший закон Кірхгофа:

$$i = i_R + i_C + i_L . \quad (2.30)$$

З урахуванням раніше розглянутого струму віток:

$$i_R = U_m \cdot G \cdot \sin(\omega t), \quad (2.31)$$

де

$$G = \frac{1}{R} \text{ – активна провідність.} \quad (2.32)$$

$$i_C = U_m \cdot B_C \cdot \cos(\omega t) = U_m \cdot \omega \cdot C \cdot \cos(\omega t), \quad (2.33)$$

де

$$B_C = \omega \cdot C \text{ – реактивна ємнісна провідність.} \quad (2.34)$$

$$i_L = -U_m \cdot B_L \cdot \cos(\omega t), \quad (2.35)$$

де

$$B_L = \frac{1}{\omega \cdot L} \text{ – реактивна індуктивна провідність.} \quad (2.36)$$

Тоді вираз (2.30) набуває вигляду

$$I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) = U_m \cdot [G \cdot \sin(\omega t) - (B_L - B_C) \cdot \cos(\omega t)], \quad (2.37)$$

або

$$I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) = U_m \cdot \sqrt{G^2 + B^2} \cdot \sin(\omega t - \varphi), \quad (2.38)$$

де φ - кут зсуву фаз між напругою *u* і струмом *i*,

$$\varphi = arctg\frac{B_L - B_C}{G} = arctg\frac{B}{G}, \qquad (2.39)$$

$B = B_L - B_C$ – реактивна провідність. (2.40)

Застосуємо позначення:

$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$ – повна провідність кола. (2.41)

Остаточно маємо:

$$I_m = U_m \cdot Y \qquad (2.42)$$

Формули (2.24), (2.26), (2.27), (2.29), (2.32), (2.36), (2.39), (2.40), (2.41), (2.42) - основа для розрахунку найпростіших кіл синусоїдного струму тригонометричним методом

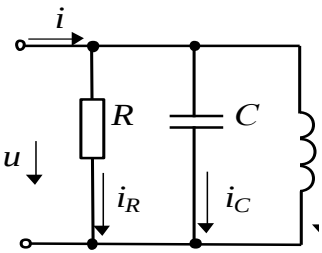


Рисунок 2.10

2.6 Потужність у колах синусоїдного струму

Розрізняють повну, активну, реактивну потужності.

Припустимо до якогось складного кола прикладена синусоїдна напруга $u = U_m \cdot \sin(\omega t)$, на вході кола проходить синусоїдний струм $i = I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi)$.

Миттєва потужність:

$$p = u \cdot i = U_m \cdot I_m \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\omega t - \varphi) = \\ = U \cdot I \cdot (\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi)). \qquad (2.43)$$

Активна потужність – середнє значення p за період, тобто енергія, що виділяється в одиницю часу у вигляді теплоти на ділянці кола, що містить опір R:

$$P = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^{2 \cdot \pi} p \, dt = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cdot \cos\varphi \cdot 2 \cdot \pi = U \cdot I \cdot \cos\varphi, \qquad (2.44)$$

де $\cos\varphi$ - коефіцієнт потужності.

При розрахунках синусоїдних кіл застосовують поняття *реактивної* потужності:

$$Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi . \qquad (2.45)$$

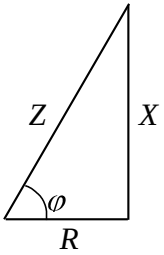
Реактивна потужність додатна при відстаючому струмі (*R-L* навантаження, φ>0) і від'ємна при випереджаючому струмі (*R-C* навантаження, φ<0). Тобто індуктивність можна розглядати як споживач реактивної енергії, а ємність – як її генератор.

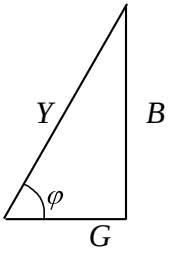
Оскільки електричні машини й апарати конструюють для роботи на певні значення струмів і напруг, то їх характеризують не активною, що залежить від $\cos\varphi$, а *повною* потужністю:

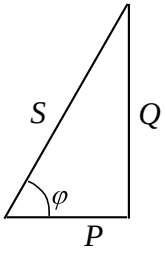
$$S = U \cdot I . \qquad (2.46)$$

Повна потужність показує ту активну потужність, яку джерело енергії може віддати споживачу, якщо останній працює при $\cos\varphi$=1.

Трикутники опорів, провідностей і потужностей подані на рис. 2.11.







$Z^2 = R^2 + X^2$ $\quad$ $Y^2 = G^2 + B^2$ $\quad$ $S^2 = P^2 + Q^2$

$\varphi = arctg(X/R)$ $\quad$ $\varphi = arctg(B/G)$ $\quad$ $\varphi = arctg(Q/P)$

Рисунок 2.11

2.7 Використання комплексних чисел для розрахунку електричних кіл

Розрахунок електричних кіл суттєво полегшується, якщо зображувати синусоїдні величини векторами, або комплексними числами.

Відповідно до формули Ейлера комплексне число $e^{j\cdot\alpha}$ дорів-

нює:

$$e^{j\cdot\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha, \qquad (2.47)$$

і на комплексній площині зображується вектором, що має одиничну довжину та складає з віссю дійсних чисел кут α (рис. 2.12). Проекція $e^{j\cdot\alpha}$ на вісь дійсних чисел - $\cos\alpha$, а на вісь уявних чисел - $\sin\alpha$; $j = \sqrt{-1}$ - уявна одиниця.

Якщо замість числа $e^{j\cdot\alpha}$ розглянути число $I_m \cdot e^{j\cdot\alpha}$, то відповідно до формули Ейлера $I_m \cdot e^{j\cdot\alpha} = I_m \cdot \cos\alpha + jI_m \cdot \sin\alpha$, і на комплексній площині воно зображується вектором, що має довжину I_m і також складає з віссю дійсних чисел кут α

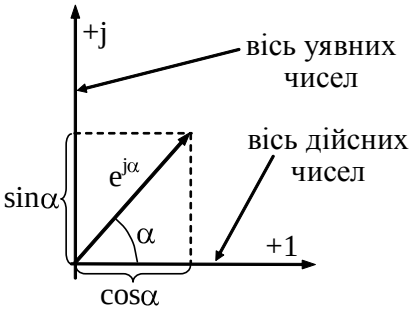


Рисунок 2.12

Кут α може бути будь-яким. Припустимо, що $\alpha = \omega \cdot t + \varphi$, тоді

$$I_m \cdot e^{j\cdot(\omega\cdot t+\varphi)} = I_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) + jI_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi), \qquad (2.48)$$

де $I_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ – дійсна частина, $I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ – коефіцієнт при уявній одиниці j.

Таким чином, синусоїдний струм $i = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ можна уявити як проекцію вектора $I_m \cdot e^{j\cdot(\omega\cdot t+\varphi)}$, що обертається з кутовою швидкістю ω, на вісь уявних чисел. Якщо синусоїдна функція повністю характеризується амплітудою і початковою фазою при відомій частоті, то початкове положення вектора $I_m \cdot e^{j\cdot(\omega\cdot t+\varphi)} = I_m \cdot e^{j\cdot\varphi} \cdot e^{j\cdot(\omega\cdot t)}$ повністю визначає синусоїдну функцію $i = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, а комплексне число $\underline{I}_m = I_m \cdot e^{j\cdot\varphi}$ називається комплексною амплітудою струму ($e^{j\cdot\omega\cdot t}$ - оператор обертання). Векторне зображення синусоїдних величин для нульового моменту часу дає наочну картину взаємного розташування

комплексних амплітуд синусоїдних функцій і дозволяє легко проводити простіші операції.

На комплексній площині від'ємні кути відкладаються проти годинникової стрілки від осі дійсних чисел, негативні – за годинниковою стрілкою від осі дійсних чисел.

Розглянемо приклад розв'язання задачі за допомогою комплексної площини.

Дана схема, що зображена на рис.2.13, $i_1 = 10 \cdot \sin(\omega t - 60^\circ)$, $i_2 = 5 \cdot \sin(\omega t + 30^\circ)$. Знайти струм i.

За першим законом Кірхгофа для миттєвих значень струму $i = i_1 + i_2$.

Будуємо на комплексній площині вектори, що зображують струми i_1, i_2, та складаємо їх для отримання загального струму i.

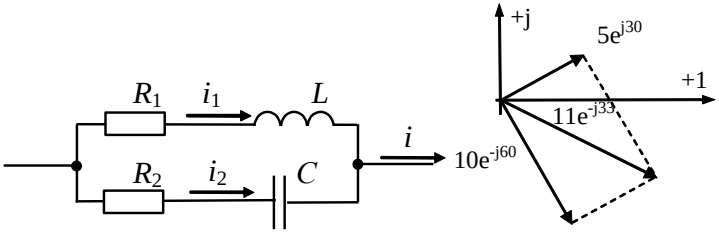


Рисунок 2.13

2.8 Дії з комплексними числами

Існують чотири *форми* запису комплексних чисел:

- показова - $\underline{I}_m = 5 \cdot e^{j \cdot 30^\circ}$;
- полярна - $\underline{I}_m = 5 \cdot \angle 30^\circ$;
- алгебраїчна - $\underline{I}_m = 4{,}33 + j \cdot 2{,}5$, де 4,33 - дійсна частина, j2,5 - уявна частина;
- тригонометрична - $\underline{I}_m = 5 \cdot \cos 30^\circ + j \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ$, як перехід від полярної форми ($\underline{I}_m = 5 \cdot \angle 30^\circ$) до алгебраїчної ($\underline{I}_m = 4{,}33 + j \cdot 2{,}5$).

Дії над комплексними числами:

• множення роблять у полярній або показовій формі, наприклад:

$$\underline{U}_m = \underline{I}_m \cdot \underline{Z} = 5 \cdot \angle 30^\circ \cdot 15 \cdot \angle -40^\circ = 75 \cdot \angle -10^\circ,\ \text{В}.$$

• ділення роблять також у полярній або показовій формі, наприклад:

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}} = \frac{75 \cdot \angle -10^\circ}{15 \cdot \angle -40^\circ} = 5\angle 30^\circ,\ \text{А};$$

• складання або вирахування роблять в алгебраїчний формі, наприклад:

$$\underline{I}_{m1} = 10\angle(-60^\circ) = 10 \cdot \cos(-60^\circ) + j \cdot 10 \cdot \sin(-60^\circ) = 5 - j \cdot 8{,}66,$$

$$\underline{I}_{m2} = 5\angle 30^\circ = 10 \cdot \cos 30^\circ + j10 \cdot \sin 30^\circ = 4{,}33 + j \cdot 2{,}5,$$

$$\underline{I}_m = \underline{I}_{m1} + \underline{I}_{m2} = 5 - j \cdot 8{,}66 + 4{,}33 + j \cdot 2{,}5 = 9{,}33 - j \cdot 6{,}16.$$

Перехід від алгебраїчної до полярної форми має деякі особливості.

Так, якщо вектор, що зображує комплексне число, знаходиться в першій або четвертій чвертях комплексної площини, перехід роблять таким чином:

$$\underline{I}_m = 4{,}33 + j \cdot 2{,}55 = \sqrt{4{,}33^2 + 2{,}55^2} \cdot \angle\left(arctg\left(\frac{2{,}55}{4{,}33}\right)\right)^\circ = 5\angle 30^\circ,$$

$$\underline{I}_m = 4{,}33 - j \cdot 2{,}55 =$$

$$= \sqrt{4{,}33^2 + 2{,}55^2} \cdot \angle\left(-arctg\left(\frac{2{,}55}{4{,}33}\right)\right)^\circ = 5\angle(-30^\circ).$$

Якщо вектор, що зображує комплексне число, знаходиться у другій чверті комплексної площини, перехід роблять наступним чином:

$$\underline{I}_m = -4{,}33 + j \cdot 2{,}55 =$$

$$= \sqrt{4{,}33^2 + 2{,}55^2} \cdot \angle\left(180^\circ - arctg\left(\frac{2{,}55}{4{,}33}\right)\right)^\circ = 5\angle 150^\circ.$$

Якщо вектор, що зображує комплексне число знаходиться в третій чверті комплексної площини, перехід роблять таким чином:

$$\underline{I}_m = -4{,}33 - j \cdot 2{,}55 =$$

$$= \sqrt{4{,}33^2 + 2{,}55^2} \cdot \angle\left(-\left(180^\circ - arctg\left(\frac{2{,}55}{4{,}33}\right)\right)\right)^\circ = 5\angle(-150^\circ).$$

Відомо, що $\frac{1}{j} = -j$; множення вектора на уявне число j означає його поворот на 90° проти годинникової стрілки.

2.9 Символічний метод розрахунку кіл змінного струму

Суть методу полягає у тому, що роблять перехід від системи інтегрально-диференціальних рівнянь, складених для миттєвих значень струмів і напруг, до системи алгебраїчних рівнянь, що складені відносно комплексних струмів, ЕРС і напруг. Синусоїдна величина зображується комплексним числом (символом), що заміщає її, диференціювання заміняється множенням на $j\omega$, а інтегрування - діленням на $j\omega$.

2.10 Закони Ома і Кірхгофа в комплексній формі

Розглянемо просте електричне коло (рис.2.14), до якого прикладена синусоїдна напруга $u = U_m \cdot \sin(\omega t)$, і в якому проходить синусоїдний струм $i = I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi)$. Інтегрально-диференціальне рівняння, що характеризує стан кола (другий закон Кірхгофа)

$$-u = u_R + u_L + u_C = i \cdot R + L \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C} \cdot \int u_C \, \mathrm{d}t. \qquad (2.49)$$

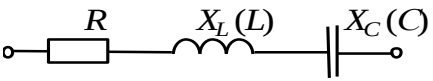


Рисунок 2.14

Алгебраїчне рівняння, складене відносно комплексів струму і напруг має вигляд

$$\underline{U}_m = R \cdot \underline{I}_m + j \cdot \omega \cdot L \cdot \underline{I}_m - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot \underline{I}_m = \underline{U}_{mR} + \underline{U}_{mL} + \underline{U}_{mC} \quad (2.50)$$

Одержаний вираз є другий законом Кірхгофа в комплексній формі.

Застосуємо позначення:

$$X_L = \omega \cdot L, \quad X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}, \; X = X_L - X_C, \; Z = \sqrt{R^2 + X^2}. \quad (2.51)$$

Відповідно індуктивним, ємнісний, реактивний опори, модуль повного опора.

Тоді рівняння (2.50) набуває вигляду:

$$\underline{U}_m = \underline{I}_m \cdot \left(R + j \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right) \right) = \quad (2.52)$$
$$= \underline{I}_m \cdot (R + j \cdot (X_L - X_C)) = \underline{I}_m \cdot Z \cdot \angle\varphi,$$

де $\underline{Z} = R + j \cdot (X_L - X_C) = Z \angle \varphi$ - комплекс повного опора кола, (2.53)

$\varphi = arctg \dfrac{X_L - X_C}{R}$ - кут зсуву фаз між струмом і напргою. (2.54)

$\underline{U}_m = \underline{I}_m \cdot \underline{Z}$ - закон Ома в комплексній формі. (2.55)

Розглянемо коло (рис.2.10), до якого прикладена синусоїдна напруга $u = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, і на вході якого проходить синусоїдний струм $i = I_m \cdot \sin(\omega t)$. Перший закон Кірхгофа для миттєвих значень струмів в інтегрально-диференціальній формі:

$$i = i_R + i_L + i_C = u \cdot G + \frac{1}{L} \cdot \int u \cdot \mathrm{d}t + C \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}, \quad (2.56)$$

де $i_L = \dfrac{1}{L} \cdot \int u \cdot \mathrm{d}t$, $i_C = C \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

Алгебраїчне рівняння, складене відносно комплексів струму і напруг має вигляд:

$$\underline{I}_m = \underline{U}_m \cdot G + \frac{\underline{U}_m}{j \cdot \omega \cdot L} + \frac{\underline{U}_m}{-j \cdot \dfrac{1}{\omega \cdot C}} = \underline{I}_{mR} + \underline{I}_{mL} + \underline{I}_{mC} \cdot \quad (2.57)$$

Одержали перший закон Кірхгофа у комплексній формі.

Висновки:

- алгебраїчна сума комплексних струмів у вузлі дорівнює нулю $\sum_{k=1}^{n} \underline{I}_k = 0$;

- алгебраїчна сума комплексних напруг уздовж замкнутого контура дорівнює алгебраїчній сумі комплексних *ЕРС*:

$$\sum_{k=1}^{n} \underline{U}_k = \sum_{k=1}^{m} \underline{E}_k ;$$

- оскільки в основі усіх розглянутих методів розрахунку кіл постійного струму лежать закони Кірхгофа, то всі вони можуть бути використані для розрахунку кіл синусоїдного струму в комплексній формі.

2.11 Комплексна провідність

Комплексною провідністю ділянки кола називають відношення комплексу струму до комплексу напруги на цій ділянці кола:

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z \cdot e^{j\cdot\varphi}} = Y \cdot e^{-j\cdot\varphi} = G - j \cdot B , \qquad (2.58)$$

де G - активна провідність; $B = B_L - B_C$ - реактивна провідність.

Знайдемо G і B, якщо відомі R, $X=X_L-X_C$:

$$\underline{Y} = G - j \cdot B = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{R - j \cdot X}{(R + j \cdot X)\cdot(R - j \cdot X)} = \frac{R - j \cdot X}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \cdot \frac{X}{R^2 + X^2} \qquad (2.59)$$

Тобто

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2}, \qquad (2.60)$$

$$B = \frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{X}{Z^2} . \qquad (2.61)$$

Знайдемо R і X, якщо відомі G і B:

$$\underline{Z} = R + j \cdot X = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{G + j \cdot B}{G - j \cdot B)(G + j \cdot B} = \\ = \frac{G + j \cdot B}{G^2 + B^2} = \frac{G}{G^2 + B^2} + j \cdot \frac{B}{G^2 + B^2}. \qquad (2.62)$$

Тобто

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{G}{Y^2}, \qquad (2.63)$$

$$X = \frac{B}{G^2 + B^2} = \frac{B}{Y^2}. \qquad (2.64)$$

2.12 Баланс потужностей у складних колах змінного струму

Припустимо, напруга на ділянці кола - $\underline{U} = U \cdot e^{j \cdot \varphi_u}$, а струм - $\underline{I} = I \cdot e^{j \cdot \varphi_i}$.

Кут зсуву фаз між напругою і струмом $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$. Тоді комплексом повної потужності визначається:

$$\tilde{S} = \underline{U} \cdot \overset{*}{\underline{I}} = U \cdot e^{j \cdot \varphi_u} \cdot I \cdot e^{-j \cdot \varphi_i} = U \cdot I \cdot e^{j \cdot \varphi} = \\ = P + j \cdot Q = U \cdot I \cdot \cos\varphi + U \cdot I \cdot \sin\varphi, \qquad (2.65)$$

де $\overset{*}{\underline{I}} = I \cdot e^{-j \cdot \varphi_i}$ - спряжене комплексне значення струму $\underline{I}$.

Вимір потужності робиться ватметром ,наприклад, електродинамічної системи. Ватметр має дві котушки: одна – нерухома, підключена послідовно в ділянку кола, де роблять вимір потужності, виконана товстим проводом і має малий опір; друга - рухома, підключена паралельно ділянці кола, де роблять вимір потужності, виконана тонким проводом і має великий опір.

Знак «*» ставлять на кінцях одноменних затискачів. Ватметр, показаний на рис.2.15, вимірює:

$$\mathrm{Re}\left[\tilde{S}\right] = \mathrm{Re}\left[\underline{U}_{ав} \cdot \overset{*}{\underline{I}}\right] = U_{ав} \cdot I \cdot \cos\left(\underline{U}_{ав} \cdot \underline{I}\right).$$

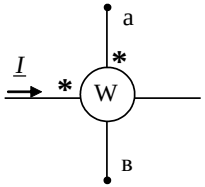


Рисунок 2.15

У будь-якому колі повинен виконуватися баланс як активних, так і пасивних потужностей, тобто сума всіх потужностей, що віддаються джерелом повинна дорівнюватись сумі всіх потужностей, що беруться споживачами:

$$\sum_{k=1}^{n} P_{ДЖ} = \sum_{k=1}^{m} P_{СПОЖ}; \quad \sum_{k=1}^{n} Q_{ДЖ} = \sum_{k=1}^{m} Q_{СПОЖ}.$$

2.13 Векторні й топографічні діаграми

Векторні діаграми - діаграми, що зображують сукупність векторів синусоїдних величин, що розглядаються, на комплексній площині з дотриманням їх взаємної орієнтації.

Топографічна діаграма - сукупність точок на комплексній площині, які зображують комплексні потенціали однойменних точок на електричній схемі. Якщо потенціали точок зображувати не точками, а векторами, то отримуємо *векторно-топографічну* діаграму.

Хвильова (часова) діаграма – крива миттєвих значень струмів, напруг тощо. Розглянемо побудову векторно-топографічної діаграми на прикладі схеми рис. 2.16.

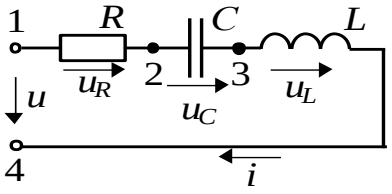


Рисунок 2.16

Порядок побудовм векторно-топографічної діаграми:

- розраховуємо комплекс струму $\underline{I}_m$;
- визначаємо $U_{mR} = I_m \cdot R,\ U_{mL} = I_m \cdot X_L,\ U_{mC} = I_m \cdot X_C$;
- вибираємо масштаби за струмом і за напругою – m_I, m_U;
- позначаємо точки на схемі (1-4);
- останню точку (4 в нашому випадку) розташовуємо на початку координат, обхід робимо назустріч струму послідовно від останньої точки до першої; при цьому пам'ятаємо, що напруга на активному опорі збігається зі струмом за фазою, напруга на індуктивності випереджає струм за фазою на 90°, напруга

на ємності відстає від струму за фазою на 90°.

На рис.2.17 наведено приклад побудови діаграми у випадку активно-ємнісного характеру кола (струм $\underline{I}_m$ випереджає напругу $\underline{U}_m = \underline{U}_{m14}$ на вході кола).

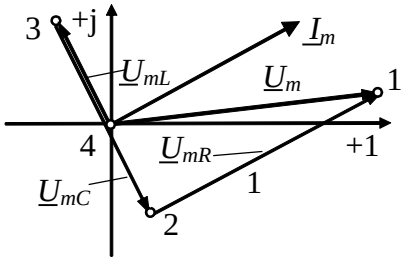


Рисунок 2.17

2.14 Умови передачі максимальної потужності від активного двополюсника до навантаження

При передачі сигналів, особливо слабких, від джерела до навантаження часто потрібно забезпечити максимальну потужність цього сигналу в навантаженні методом підбору параметрів навантаження.

До затискачів $11'$ активного двополюсника підключене навантаження - рис.2.18. Нехай $\underline{Z}_o = R_o + j \cdot X_o$ є вхідний опір активного двополюсника з боку затискачів $11'$, а $\underline{Z}_н = R_н + j \cdot X_н$ - опір навантаження.

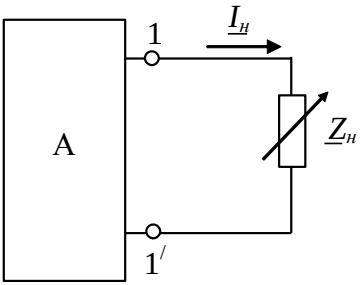


Рисунок 2.18

За теоремою про активний двополюсник струм навантаження:

$$\underline{I}_н = \frac{\underline{U}_{11'}}{\underline{Z}_н + \underline{Z}_o} = \frac{\underline{U}_{11'}}{(R_н + R_o) + j \cdot (X_н + X_o)}. \qquad (2.66)$$

Активна потужність навантаження визначається за формулою

$$P_н = I_н^2 \cdot R_н . \qquad (2.67)$$

Підставимо (2.66) в (2.67) і отримаємо:

$$P_н = \frac{U_{11'xx}}{\underline{Z}_н + \underline{Z}_o} = \frac{U^2_{11'xx} \cdot R_н}{(R_н + R_o)^2 + j \cdot (X_н + X_o)^2}. \qquad (2.68)$$

Зрозуміло, що якщо $X_н = -X_0$ при будь-якому значенні $R_н$ струм $I_н \to \max$.

Тому

$$P_н = \frac{U^2_{11'xx} \cdot R_н}{(R_н + R_o)^2}. \qquad (2.69)$$

Візьмемо від рівняння (2.69) похідну по $R_н$ і прирівняємо її до нуля:

$$\frac{dP_н}{dR_н} = \frac{U^2_{11'xx} \cdot (R_н + R_o)^2 - 2 \cdot R_н \cdot (R_н + R_o)}{(R_н + R_o)^4} =$$

$$= -\frac{I_m}{\omega_0 \cdot C} \cdot \cos(\varphi_0 \cdot t) = -\rho \cdot I_m \cdot \cos(\varphi_0 \cdot t) = -\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot I_m \cdot \cos(\varphi_0 \cdot t). \qquad (2.70)$$

Тобто активна потужність P є максимальною, коли $\underline{Z}_н = \overset{*}{\underline{Z}}_н$ і умовами передачі максимальної активної потужності від активного двополюсника до навантаження є рівність комплексного опора $\underline{Z}_н$ навантаження спряженому комплексу вхідного опора $\overset{*}{\underline{Z}}_o$ активного двополюсника.

2.15 Резонанс у послідовному коливальному контурі

Резонансний режим – це такий режим роботи кола, що містить хоча б одну індуктивність і хоча б одну ємність, під час якого вхідний опір є чисто активним.

Розрізняють два основних резонансних режими:

- резонанс напруг;
- резонанс струмів.

Резонанс напруг – це такий режим роботи кола, що містить

послідовно поєднані ємності й індуктивності, під час якого вхідний реактивний опір дорівнює нулю, а струм на вході збігається за фазою зі вхідною напругою. Резонанс напруг відбувається в так званому послідовному коливальному контурі – рис.2.16. У такому контурі індуктивний опір компенсується ємнісним: $X = X_L - X_C = 0$,

$\underline{Z}_{вх} = R$, а сумарна реактивна потужність $Q = Q_L - Q_C = 0$.

Домогтися резонансу можна змінюючи частоту, ємність, індуктивність.

Вводимо такі поняття:

1) *резонансна частота* - частота під час резонансу ω_0, яка знаходиться з умови

$$X_L = X_C, \quad \omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C} \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}; \tag{2.71}$$

2) *хвильовий* (*характеристичний*) *опір* - це ємнісний або індуктивний опір під час резонансу, тобто

$$\rho = \omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C} = \sqrt{\frac{L}{C}}; \tag{2.72}$$

3) *добротність контура* - це відношення напруги на ємності чи напруги на індуктивності до вхідної напруги; показує в скільки разів напруга на ємності чи напруга на індуктивності більше напруги на вході під час резонансу:

$$q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\omega_0 \cdot L \cdot I}{I \cdot R} = \frac{\rho}{R}. \tag{2.73}$$

Під час резонансу енергія магнітного поля дорівнює енергії електричного поля і відбувається постійний перехід енергії магнітного поля в енергію електричного. Сума миттєвих значень енергії магнітного і електричного полів - це миттєва енергія електромагнітного поля:

$$w_{ем} = w_м + w_е = \frac{L \cdot i^2}{2} + \frac{C \cdot u_c^2}{2}, \tag{2.74}$$

де $i = I_m \cdot \sin \omega_0 t$. Миттєва напруга на ємності:

$$u_C = U_{Cm} \cdot \sin\left(\omega_0 \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) = -U_{Cm} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) =$$

$$= -\frac{I_m}{\omega_0 \cdot C} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) = -\rho \cdot I_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) = \quad (2.75)$$

$$= -\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot I_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t).$$

Миттєве значення загального запасу електромагнітної енергії в резонансному режимі – величина постійна:

$$w_{ем} = \frac{L \cdot I_m^2}{2} \cdot \sin^2(\omega_0 \cdot t) + \frac{L}{C} \cdot \frac{C}{2} \cdot I_m^2 \cos^2(\omega_0 \cdot t) = \frac{L \cdot I_m^2}{2} = \frac{C \cdot U_m^2}{2}. \quad (2.76)$$

Таким чином зменшення енергії електричного поля супроводжується збільшенням енергії магнітного поля (і навпаки).

Частотні характеристики послідовного коливального контура – це залежності різних параметрів контура від частоти (рис.2.19):

$$X_L = \omega \cdot L = f(\omega); \; X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = f(\omega); \; X = X_L - X_C = f(\omega);$$

$$\mathrm{Z} = \sqrt{R^2 + X^2} = f(\omega); \; I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} = f(\omega);$$

$$U_L = I \cdot \omega \cdot L = \frac{U \cdot \omega \cdot L}{\sqrt{R^2 + X^2}} = f(\omega); \quad (2.77)$$

$$U_C = I \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{U}{\omega \cdot C \cdot \sqrt{R^2 + X^2}} = f(\omega);$$

Фазочастотна характеристика – це залежність кута зсуву фаз від частоти (рис. 2.19):

$$\varphi = f(\omega) = arctg\frac{\omega \cdot L - 1/\omega \cdot C}{R}. \quad (2.78)$$

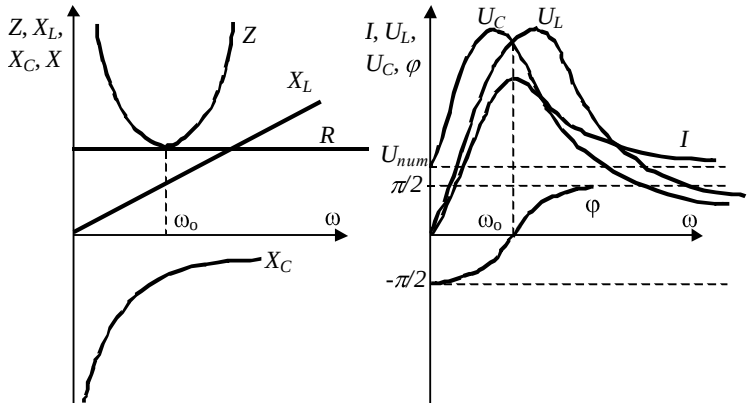


Рисунок 2.19

2.16 Резонанс у паралельному коливальному контурі

Резонанс струмів - такий режим роботи кола, що містить паралельне з'єднання ємності й індуктивності, за якого вхідна реактивна провідність дорівнює нулю, а струм збігається за фазою з напругою на вході кола.

Під час резонансу струмів струми в паралельних вітках можуть бути значно більшими, ніж у загальній вітці, індуктивна реактивна провідність компенсується ємнісною, реактивна потужність дорівнює нулю:

$$B = B_L - B_C = 0; \quad Q = Q_L - Q_C = 0.$$

Отримати резонанс струмів можна змінюючи частоту, ємність, індуктивність.

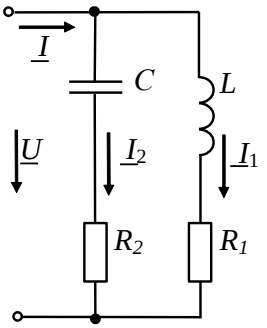


Рисунок 2.20

Розглянемо реальний паралельний коливальний контур (рис.2.20), до якого прикладається синусоїдна напруга $u_C = U_m \cdot \sin(\omega t)$. Знайдемо модулі струмів через провідності гілок

$$I = U \cdot Y, \quad I_1 = U \cdot Y_1, \quad I_2 = U \cdot Y_2, \tag{2.79}$$

де

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}; \; Y_1 = \sqrt{G_1^2 + B_1^2}; \; Y_2 = \sqrt{G_2^2 + B_2^2}. \tag{2.80}$$

Активні провідності віток:

$$G_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega \cdot L)^2} = \frac{R_1}{Z_1^2}; \quad G_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} = \frac{R_2}{Z_2^2}. \tag{2.81}$$

Повна активна провідність кола

$$G = G_1 + G_2. \tag{2.82}$$

Реактивні провідності віток:

$$B_1 = B_L = \frac{\omega \cdot L}{R_1^2 + (\omega \cdot L)^2} = \frac{\omega \cdot L}{Z_1^2};$$

$$B_2 = B_C = -\frac{1/\omega \cdot C}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} = -\frac{1}{\omega \cdot C \cdot Z_2^2}. \tag{2.83}$$

Повна реактивна провідність кола

$$B = B_1 + B_2. \tag{2.84}$$

Під час резонансу $Y_o = \sqrt{(G_1 + G_2)^2} = G_1 + G_2$ і тому загальний струм досягає мінімального значення - $I_o = U \cdot Y_o = U \cdot (G_1 + G_2)$. Знайдемо резонансну частоту ω_o з умови $B = 0 \Rightarrow B = B_L - B_C \Rightarrow \frac{\omega_o \cdot L}{R_1^2 + (\omega_o \cdot L)^2} = \frac{1/\omega_o \cdot C}{R_2^2 + (1/\omega_o \cdot C)^2}$.

Отже, одержимо

$$B = B_L - B_C = \frac{1/\omega_o \cdot C}{R_2^2 + (1/\omega_o \cdot C)^2}. \tag{2.85}$$

Таким чином, резонансна частота:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \sqrt{\frac{L/C - R_1^2}{L/C - R_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}. \tag{2.86}$$

З останнього виразу бачимо, що резонанс є можливим у випадках:

1) коли $\sqrt{\frac{L}{C}} > R_1$ та $\sqrt{\frac{L}{C}} > R_2$;

2) коли $\sqrt{\frac{L}{C}} < R_1$ та $\sqrt{\frac{L}{C}} < R_2$;

3) коли $\sqrt{\frac{L}{C}} = R_1 = R_2 = \rho$ - резонанс можливий при будь-якій частоті, тому що вхідний опір має активний характер.

Якщо $R_1 \approx 0$ та $R_2 = 0$, то струм $I \to 0$, $\underline{Z}_{вх} \to \infty$.

Контури, у яких R_1 та R_2 є малими в порівнянні з $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ звуться *контурами з малими втратами* – рис.2.21; для таких контурів резонансна частота - $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$.

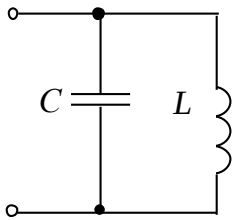


Рисунок 2.21

Добротність контура *q*:

$$q = \frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I}. \qquad (2.87)$$

Хвильова провідність γ:

$$\gamma = \sqrt{\frac{C}{L}}. \qquad (2.88)$$

Залежності струму *I* і кута зсуву фаз φ від кутової частоти ω для реального контура, що поданий на рис. 2.20, зображені на рис. 2.22, а залежності параметрів B_L, B_C, B від кутової частоти ω для ідеального контура (рис.2.21) - на рис. 2.23.

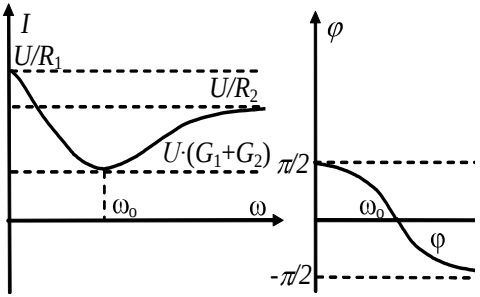


Рисунок 2.22

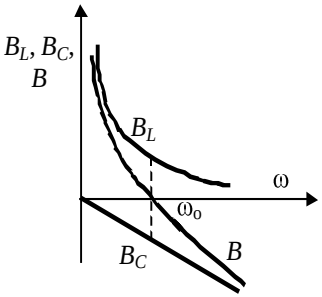


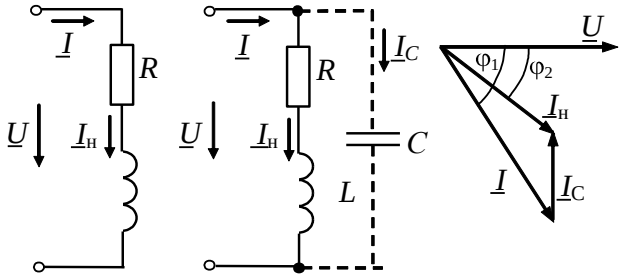
Рисунок 2.23

2.17 Практичне застосування резонансу

1. Підвищення коефіцієнта потужності (компенсація куту зсуву фаз).

Для кращого використання електричних машин і апаратів бажано мати найбільш високий коефіцієнт потужності $\cos\varphi = \frac{P}{U \cdot I}$, тобто намагатися отримати менший зсув за фазою між струмом і напругою. Високий $\cos\varphi$ необхідний для зменшення втрат під час передачі енергії по лініях електропередач: якщо підвищувати $\cos\varphi$, то струм, від якого залежить рівень втрат у проводах можна зменшити: $\cos\varphi \uparrow \Rightarrow I = \frac{P}{U \cdot \cos\varphi} \downarrow$.

На практиці це виконують так: конденсатор під'єднують паралельно до індуктивних елементів (наприклад, до асинхронних двигунів) – рис. 2.24 ($I_н$ – струм навантаження).



$\underline{I}=\underline{I}_н$, $\cos\varphi_1$ $\underline{I}=\underline{I}_н+\underline{I}_C$, $\cos\varphi_2 > \cos\varphi_1$

Рисунок 2.24

2. У передавачах та радіоприймальних пристроях (наприклад, настройка радіоприймача на яку-небудь станцію означає досягнення резонансу його коливального контура з частотою електромагнітних хвиль, що випромінює ця станція). У провідниковому міжміському зв'язку.

4. В електровимірювальній техніці і пристроях автоматики.

5. У ферорезонансних стабілізаторах напруги.

Але якщо резонанс не передбачений спеціально, то він може визвати небажані наслідки - пробій ізоляції і пошкодження електротехнічних пристроїв.

РОЗДІЛ 3 ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ

3.1 Основні поняття і класифікація

Чотириполюсник - електричне коло, що має два вхідних і два вихідних затискачів (наприклад, трансформатор, мостова схема, і т. ін.). Поняття «чотириполюсник» використовують, коли треба визначити тільки вхідні й вихідні струми і напруги на вході й виході пристрою. Умовне позначення наведене на рис. 3.1.

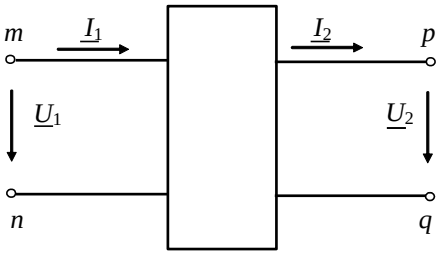


Рисунок 3.1

На рис. 3.1 *m, n* – вхідні затискачі, до яких під'єднують джерело живлення; *p, q* - вихідні затискачі, до яких під'єднують навантаження;

$$\left.\begin{array}{l}\underline{I}_1,\ \underline{U}_1 - \text{вхідні}\\ \underline{I}_2,\ \underline{U}_2 - \text{вихідні}\end{array}\right\}\text{струми і напруги .}$$

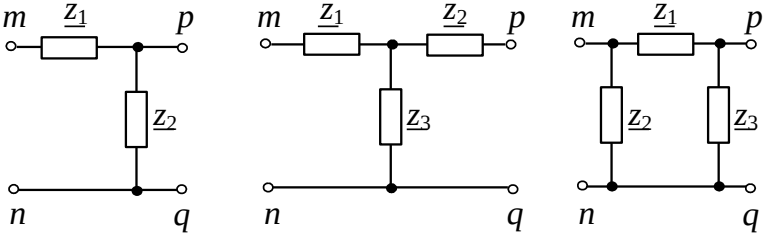
Таким чином, чотириполюсник – передаточна ланка між джерелом живлення і навантаженням, які можуть змінюватися, але схема внутрішнього поєднання елементів чотириполюсника, залишається незмінними.

Класифікація чотириполюсників:

- за принципом лінійності – лінійні й нелінійні;
- за схемою внутрішніх поєднань – Г-подібні, Т-подібні, П-подібні (рис.3.2);
- активні (мають у своєму складі хоча б одне джерело енергії) і пасивні (не мають у своєму складі джерел енергії);

- автономні і неавтономні. Якщо автономний чотириполюсник відімкнути від схеми, то хоча б на одній парі затискачів існуватиме напруга;

- симетричний (якщо зміна містами джерела живлення і навантаження не змінить струмів на вході й виході чотириполюсника) і несиметричний.



Г-подібний Т-подібний П-подібний

Рисунок 3.2

3.2 Основні рівняння чотириполюсника

Для будь-якого лінійного пасивного чотириполюсника існують основні рівняння, що пов'язують струм $\underline{I}_1$ і напругу $\underline{U}_1$ на вході зі струмом $\underline{I}_2$ і напругою $\underline{U}_2$ на виході. Розглянемо так звану А-форму запису системи основних рівнянь чотириполюсника, для якої характерними є саме такі напрямки струмів і напруг, як показано на рис.3.1:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = A \cdot \underline{U}_2 + B \cdot \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 = C \cdot \underline{U}_2 + D \cdot \underline{I}_2, \end{cases} \qquad (3.1)$$

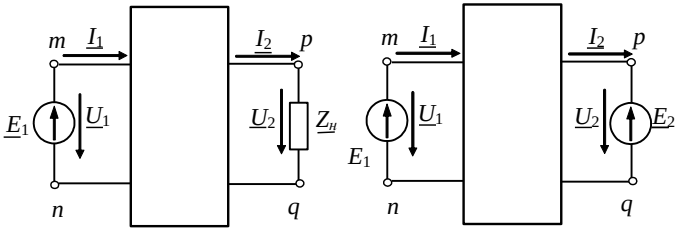
де *A, B, C, D* – комплексні коефіцієнти, що залежать від виду внутрішніх поєднань елементів, опорів, частоти; визначаються шляхами розрахунку та досліду.

Коефіцієнти чотириполюсника зв'язані між собою співвідношенням:

$$A \cdot D - B \cdot C = 1. \qquad (3.2)$$

Доведемо, що рівняння (3.1) існують. Відповідно до теореми про компенсацію можна замінити опір $\underline{Z}_н$ зі струмом $\underline{I}_2$

на ЕРС $\underline{E}_2$, що дорівнює $\underline{E}_2 = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_н$ і спрямована назустріч струму $\underline{I}_2$ (рис.3.3).



а) *б)*

Рисунок 3.3

Запишемо вирази для струмів $\underline{I}_1$ та $\underline{I}_2$, використовуючи метод накладання та поняття вхідних і взаємних провідностей.

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{E}_1 \cdot \underline{Y}_{11} - \underline{E}_2 \cdot \underline{Y}_{12}, & (3.3) \\ \underline{I}_2 = \underline{E}_1 \cdot \underline{Y}_{21} - \underline{E}_2 \cdot \underline{Y}_{22}, & (3.4) \end{cases}$$

де $\underline{Y}_{11}$, $\underline{Y}_{22}$ – власні провідності вхідної і вихідної віток,

$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$ – взаємні провідності вхідної (першої) і вихідної (другої) віток.

З (3.4) виразимо

$$\underline{E}_1 = \underline{E}_2 \cdot \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}} + \underline{I}_2 \cdot \frac{1}{\underline{Y}_{12}}. \qquad (3.5)$$

Підставимо отриманий вираз (3.5) у рівняння (3.3). Отримаємо:

$$\underline{I}_1 = \underline{E}_2 \cdot \frac{\underline{Y}_{11} \cdot \underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}^2}{\underline{Y}_{12}} + \underline{I}_2 \cdot \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{12}}. \qquad (3.6)$$

Введемо позначення:

$$A = \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}}; \quad B = \frac{1}{\underline{Y}_{12}}; \quad C = \frac{\underline{Y}_{11} \cdot \underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}^2}{\underline{Y}_{12}}; \quad D = \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{12}}. \qquad (3.7)$$

Розмірності коефіцієнтів: A і D - безрозмірні величини, С – [См], В – [Ом]. Для симетричного чотириполюсника $A=D$.

З врахуванням введених позначень і того, що

$\underline{U}_1 = \underline{E}_1$, $\underline{U}_2 = \underline{E}_2$ можна переписати рівняння (3.5) та (3.6) у вигляді:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = A \cdot \underline{U}_2 + B \cdot \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 = C \cdot \underline{U}_2 + D \cdot \underline{I}_2. \end{cases}$$

Підставимо вирази для коефіцієнтів *A, B, C, D* (3.7) у рівняння (3.2) та переконаємось у виконанні співвідношення (3.2):

$$A \cdot D - D \cdot C = \frac{\underline{Y}_{22} \cdot \underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{12}^2} - \frac{\underline{Y}_{22} \cdot \underline{Y}_{11} - \underline{Y}_{12}^2}{\underline{Y}_{12}^2} = 1. \qquad (3.8)$$

Якщо поміняти місцями $\underline{E}_1$ і $\underline{Z}_н$ та зробити ті самі операції, то отримаємо систему основних рівнянь чотириполюсника, коли його живлення здійснюється зі сторони вихідних затискачів.

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = D \cdot \underline{U}_1 + B \cdot \underline{I}_1, \\ \underline{I}_2 = C \cdot \underline{U}_1 + A \cdot \underline{I}_1, \end{cases} \qquad (3.9)$$

Існують також інші форми запису рівнянь чотириполюсника – *H, Y, Z, G, B*. Наприклад, для *Y* – форми напрямок струму $\underline{I}_1$ такий самий як і для *A*-форми, а напрямок $\underline{I}_2$ – протилежний А-формі. *Y* – форма запису має вигляд

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = Y_{11} \cdot \underline{U}_1 + Y_{12} \cdot \underline{U}_2, \\ \underline{I}_2 = Y_{21} \cdot \underline{U}_1 + Y_{22} \cdot \underline{U}_2, \end{cases} \qquad (3.10)$$

де

$$Y_{11} = \frac{D}{B};\ Y_{12} = Y_{21} = -\frac{1}{B};\ Y_{22} = \frac{A}{B}. \qquad (3.11)$$

Таким чином, якщо з чотирьох величин $\underline{I}_1$, $\underline{I}_1$, $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$ дві величини є відомими, то інші визначаються з основних рівнянь чотириполюсника за умови відомих коефіцієнтів.

Форма *A* застосовується в теорії кругових діаграм, форми *Y, Z* – у теорії синтезу кіл, параметри схем заміщення транзисторів представляють у *H*-формі.

3.3 Визначення коефіцієнтів пасивного чотириполюсника

3.3.1 Визначення коефіцієнтів шляхом розрахунку

У цьому випадку повинні бути відомими схема з'єднання елементів і параметри цих елементів.

Отримаємо вирази для визначення коефіцієнтів. Основні рівняння, як відомо, мають вигляд:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = A \cdot \underline{U}_2 + B \cdot \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 = C \cdot \underline{U}_2 + D \cdot \underline{I}_2. \end{cases}.$$

Припустимо, що струм і $\underline{I}_2$=0 (режим холостого ходу на виході).

Тоді

$$\begin{cases} \underline{U}_{1xx} = A \cdot \underline{U}_{2xx}, \\ \underline{I}_{1xx} = C \cdot \underline{U}_{2xx}, \end{cases} \text{ звідки } \frac{\underline{U}_{1xx}}{\underline{I}_{1xx}} = \frac{A}{C} = \underline{Z}_{1xx}, \qquad (3.12)$$

де $\underline{Z}_{1xx}$ - вхідний опір чотириполюсника у режимі холостої ходи на виході.

Припустимо, що струм $\underline{U}_2 = 0$ (режим короткого замикання на виході). Тоді

$$\begin{cases} \underline{U}_{1кз} = B \cdot \underline{I}_{2кз}, \\ \underline{I}_{1кз} = D \cdot \underline{I}_{2кз}, \end{cases} \text{ звідки } \frac{\underline{U}_{1кз}}{\underline{I}_{1кз}} = \frac{B}{D} = \underline{Z}_{1кз}, \qquad (3.13)$$

де $\underline{Z}_{1кз}$ - вхідний опір чотириполюсника у режимі короткого замикання на виході.

Основні рівняння чотириполюсника, коли його живлення здійснюється зі сторони вихідних затискачів, як відомо, мають вигляд

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = D \cdot \underline{U}_1 + B \cdot \underline{I}_1, \\ \underline{I}_2 = C \cdot \underline{U}_1 + A \cdot \underline{I}_1. \end{cases}$$

Припустимо, що на вході коротке замикання - $\underline{U}_1 = 0$.

Тоді

$$\begin{cases} \underline{U}_{2кз} = B \cdot \underline{I}_{1кз}, \\ \underline{I}_{2кз} = A \cdot \underline{I}_{1кз}, \end{cases}$$

Звідки

$$\frac{\underline{U}_{2кз}}{\underline{I}_{2кз}} = \frac{B}{A} = \underline{Z}_{2кз}, \qquad (3.14)$$

де $\underline{Z}_{2кз}$ - вихідний опір чотириполюсника у режимі короткого замикання на вході при живленні зі сторони виходу.

Виразимо усі коефіцієнти через коефіцієнт *A*:

$$C = \frac{A}{\underline{Z}_{1кз}}; \quad B = A \cdot \underline{Z}_{2кз}; \quad D = \frac{B}{\underline{Z}_{1кз}} = \frac{A \cdot \underline{Z}_{2кз}}{\underline{Z}_{1кз}}. \qquad (3.15)$$

Скористаємося рівнянням (3.2), в яке підставимо рівняння (3.15):

$$A^2 \cdot \frac{\underline{Z}_{2кз}}{\underline{Z}_{1кз}} - A^2 \cdot \frac{\underline{Z}_{2кз}}{\underline{Z}_{1xx}} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1кз} \cdot \underline{Z}_{1xx}}{\underline{Z}_{2кз} \cdot (\underline{Z}_{1xx} - \underline{Z}_{1кз})}}. \qquad (3.16)$$

Висновок: якщо відомі $\underline{Z}_{2кз}$, $\underline{Z}_{1xx}$, $\underline{Z}_{1кз}$, то за формулами (3.15), (3.16) знаходять усі коефіцієнти чотириполюсника.

Розглянемо приклад. Нехай у Т-подібного чотириполюсника (рис.3.4) відомі параметри його елементів:

$R = 100$ Ом, $X_{\text{L}} = 200$ Ом,

$X_{\text{C}} = 100$ Ом.

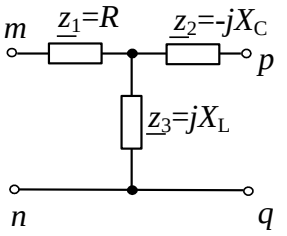


Рисунок 3.4

Визначимо коефіцієнти *A, B, C, D:*

- живлення зі сторони входу, режим холостої ходи на виході: $\underline{Z}_{1xx} = R + j \cdot X_L = 100 + j \cdot 200 = 224 \angle 63{,}4^\circ$ Ом;

- живлення зі сторони входу, коротке замикання на виході:

$$\underline{Z}_{1кз} = R + \frac{j \cdot X_L \cdot (-j \cdot X_C)}{j \cdot (X_L - X_C)} = 100 + \frac{20000}{j \cdot 100} =$$

$$= 100 - j \cdot 200 = 224 \angle -63{,}4^\circ \text{ Ом};$$

- живлення зі сторони виходу, коротке замикання на вході:

$$\underline{Z}_{2кз} = -j \cdot X_C + \frac{R \cdot j \cdot X_L}{R + j \cdot X_L} = -j \cdot 100 + \frac{j \cdot 20000}{100 + j \cdot 200} =$$

$$= 77{,}3 - j \cdot 61{,}3 = 98{,}6 \angle -38{,}4° \text{ Ом};$$

- за формулами (3.15), (3.16) визначаємо коефіцієнти:

$$A = \sqrt{\frac{224\angle -63{,}4° \cdot 224\angle 63{,}4°}{98{,}6\angle -38{,}4° \cdot (224\angle 63{,}4° - 224\angle -63{,}4°)}} = 1{,}128\angle -25{,}8°;$$

$$B = A \cdot \underline{Z}_{2кз} = 1{,}128\angle -25{,}8° \cdot 98{,}6 \cdot \angle -38{,}4° = 111{,}22\angle -64{,}2° \text{ Ом};$$

$$C = A / \underline{Z}_{1xx} = \frac{1{,}128\angle -25{,}8°}{224\angle 63{,}4°} = 0{,}005\angle -89{,}2° \text{ См};$$

$$D = B / \underline{Z}_{1кз} = \frac{111{,}22\angle -64{,}2°}{224\angle -63{,}4°} = 0{,}5\angle -0{,}8° \text{ См}.$$

Перевірка:

$$A \cdot D - B \cdot C = 1.128\angle -25.8° \cdot 0.5\angle -0.8° -$$
$$-111.22\angle -64.2° \cdot 0.005\angle -89.2° =$$
$$= 0.564\angle -26.4° - 0.5561\angle -153.4 =$$
$$= 0.505 - j \cdot 0.25 + 0.5 + j \cdot 0.249 \approx 1.$$

3.3.2 Дослідний шлях визначення коефіцієнтів чотириполюсника

Схема для визначення коефіцієнтів чотириполюсника зображена на рис.3.5.

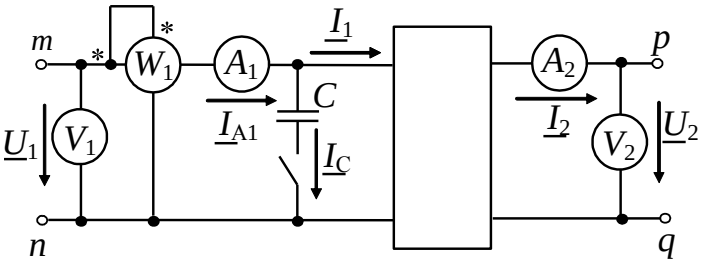


Рисунок 3.5

Етапи визначення коефіцієнтів:

1. *Дослід холостого ходу* (живлення зі сторони входу чотириполюсника):

- модуль опору $Z_{1xx} = \dfrac{U_{1xx}}{I_{1xx}} = \dfrac{\text{показання вольтметра } V_1}{\text{показання амперметра } A_1}$;

- модуль кута зсуву фаз φ_{1xx}:

$$\varphi_{1xx} = \arccos \frac{P_{1xx}}{U_{1xx} \cdot I_{1xx}} =$$

$$= \arccos \frac{\text{показання ваттметра } W_1}{\text{показання амперметра } A_1 \cdot \text{показання вольтметра } V_1}.$$

2. *Дослід короткого замикання* (живлення зі сторони входу):

- модуль опору $Z_{1кз} = \dfrac{U_{1кз}}{I_{1кз}} = \dfrac{\text{показання вольтметра } V_1}{\text{показання амперметра } A_1}$;

- модуль кута зсуву фаз $\varphi_{1кз}$:

$$\varphi_{1кз} = \arccos \frac{P_{1кз}}{U_{1кз} \cdot I_{1кз}} =$$

$$= \arccos \frac{\text{показання ваттметра } W_1}{\text{показання амперметра } A_1 \cdot \text{показання вольтметра } V_1}.$$

3. *Дослід короткого замикання на вході* (живлення зі сторони виходу, при проведенні цього досліду ватметр W_2 треба ввімкнути в вихідне коло):

- модуль опору $Z_{2кз} = \dfrac{U_{2кз}}{I_{2кз}} = \dfrac{\text{показання вольтметра } V_2}{\text{показання амперметра } A_2}$;

- модуль кута зсуву фаз $\varphi_{2кз}$:

$$\varphi_{2кз} = \arccos \frac{P_{2кз}}{U_{2кз} \cdot I_{2кз}} =$$

$$= \arccos \frac{\text{показання ваттметра } W_2}{\text{показання амперметра } A_2 \cdot \text{показання вольтметра } V_2}.$$

4. *Досліди визначення знаків кутів* φ_{1xx}, $\varphi_{1кз}$, $\varphi_{2кз}$ виконують за допомогою ланцюжка “ ключ – конденсатор ”:

- якщо при замиканні ключа К показання амперметра A_1 зменшиться, то це означає, що характер кола активно-

індуктивний, а кут має знак “+”;

- якщо при замиканні ключа К показання амперметра A_1 збільшиться, то це означає, що характер кола активно-ємнісний, а кут має знак “-”.

За незамкнутого ключа К: $\underline{I}_{A_1} = \underline{I}_1$, за замкнутого ключа К: $\underline{I}_{A_1} = \underline{I}_1 + \underline{I}_C$. Суть досліду ілюструють векторні діаграми (рис.3.6).

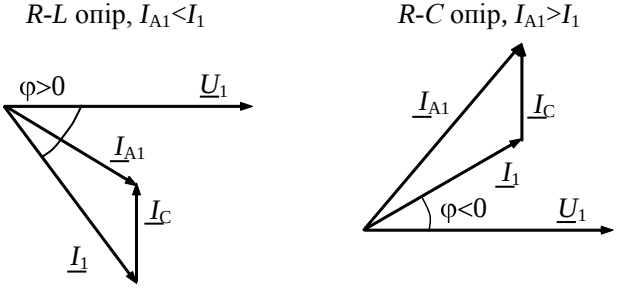


Рисунок 3.6

3.4 Схеми заміщення пасивного чотириполюсника

Будь-який складний чотириполюсник можна замінити більш простішим (Т-, П-подібними) і за цієї заміни три опори схеми $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$ повинні бути розраховані таким чином, щоб схема заміщення давала б такі самі коефіцієнті *A, B, C, D*, що й вихідний чотириполюсник.

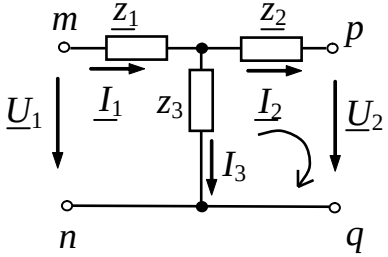


Рисунок 3.7

Нехай деякий складний чотириполюсник з коефіцієнтами *A, B, C, D* замінили Т-подібним чотириполюсником (рис.3.7). Знайдемо, якими саме мають бути опори $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$, щоб коефіцієнти *A, B, C, D* залишались незмінними.

Рівняння за першим і другим законами Кірхгофа:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0 \\ \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{I}_3 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{U}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \tag{3.17}$$

$$\begin{cases} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = \underline{I}_3 \\ \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{U}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_3} \cdot \underline{U}_2 + \left(1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}\right) \cdot \underline{I}_2 . \tag{3.18}$$

Порівняємо друге рівняння системи (3.1) з рівнянням (3.18). Зрозуміло, що

$$C = \frac{1}{\underline{Z}_3}, D = 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}. \tag{3.19}$$

Для зовнішнього контура:

$$\underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{U}_2 - \underline{U}_1 = 0 \Rightarrow \tag{3.20}$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 . \tag{3.21}$$

Підставимо рівняння (3.18) в (3.21):

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \frac{\underline{U}_2 \cdot \underline{Z}_1}{\underline{Z}_3} + \underline{I}_2 \cdot \left(1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}\right) \cdot \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 \Rightarrow \tag{3.22}$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cdot \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}\right) + \underline{I}_2 \cdot \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}\right). \tag{3.23}$$

Порівняємо перше рівняння системи (3.1) з рівнянням (3.23). Зрозуміло, що

$$A = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}, B = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}. \tag{3.24}$$

Таким чином, з (3.19) та (3.24):

$$\underline{Z}_3 = \frac{1}{C}, \underline{Z}_1 = \frac{A-1}{C}, \underline{Z}_2 = \frac{D-1}{C}. \tag{3.25}$$

Формули (3.25) використовуються для розрахунку $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$, коли відомі коефіцієнти чотириполюсника.

3.5 Годографи (кругові та лінійні діаграми)

Багато практичних задач потребують дослідження залежності кола від різних факторів. Поряд з аналітичними методами використовують і графічні, тобто побудову годографів (діаграм).

Годограф – геометричне місце кінців векторів, що зображують різні величини. Годографи можуть мати форму дуги кола – тоді вони називаються *круговими* діаграмами, або форму лінії – тоді це *лінійні* діаграми.

3.5.1 Лінійні діаграми

Розглянемо ділянку кола (рис. 3.8).

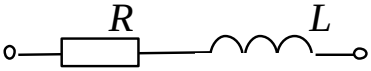


Рисунок 3.8

Побудуємо геометричне місце кінців вектора, що зображує комплексний опір цієї ділянки $\underline{Z} = R + j \cdot X_L$ при зміні

а) $0 \le R \le \infty$;

б) $0 \le X_L \le \infty$.

Годографом у випадку а) є пряма, яка паралельна осі дійсних чисел і проходить через точку з координатами $0; X_L$ (рис.3.9, а). Годографом у випадку б) є пряма, яка паралельна осі уявних чисел і проходить через точку з координатами $R; 0$ (рис.3.9, б).

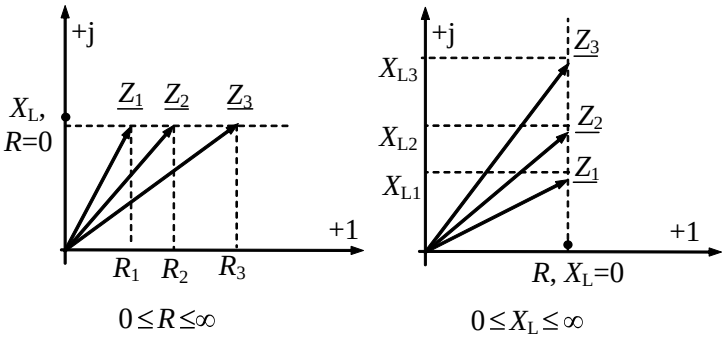


Рисунок 3.9

Розглянемо інший приклад побудови лінійної діаграми для струму $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ при $U_{ab} = const$. Нехай $R, X_L = const$; $X_C = \text{var}$ (коло – рис.3.10).

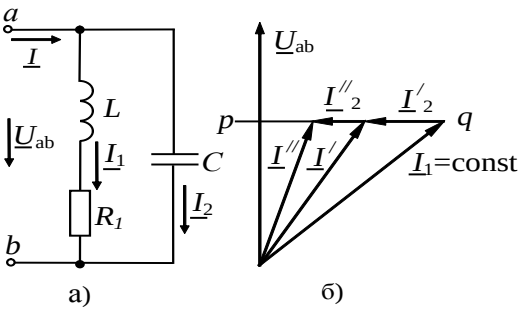


Рисунок 3.10

Струм $\underline{I}_1$ відстає від $\underline{U}_{ab}$ на кут φ : $\varphi = arctg\dfrac{X_L}{R}$. Струм $\underline{I}_2$ випереджає $\underline{U}_{ab}$ на кут 90°. Годограф у цьому випадку – лінія *pq*.

Висновок: часто деяка комплексна величина визначається рівнянням виду $\underline{N} = \underline{A} + \underline{B}$, де $\underline{A} = A \cdot e^{j\alpha} = const$, $\underline{B} = B \cdot e^{j\beta}$ – змінна комплексна величина, в якій β=const, а $0 \le B \le \infty$ (α, β – кути комплексних величин $\underline{A}$ та $\underline{B}$ відносно осі дійсних чи-

сел). На комплексній площині вектор $\vec{N}$ є сумою двох векторів $\vec{A}$ та $\vec{B}$, один з яких ($\vec{A}$) незмінний, а в іншого ($\vec{B}$) – незмінний напрям і змінна довжина:

$$\vec{N} = \vec{A} + \vec{B},\ \text{де}\ \vec{A} = const,\ 0 \le \left|\vec{B}\right| \le \infty,\ \beta = const.$$

Тоді рівняння $\underline{N} = \underline{A} + \underline{B}$

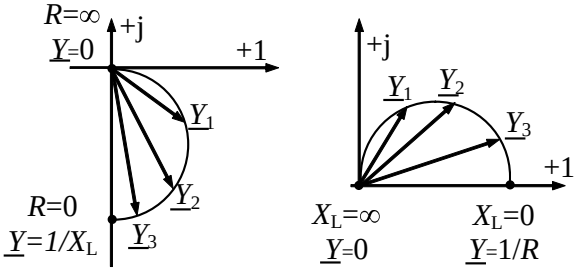
на комплексній площині є рівнянням прямої, що проходить під кутом β до осі дійсних чисел через кінець вектора $\vec{A}$.

3.5.2 Кругові діаграми

Розглянемо провідність ділянки кола (рис.3.8): $\underline{Y} = \dfrac{1}{R + j \cdot X_L}$, коли

а) $0 \le R \le \infty$ та $X_L = const$;

б) $0 \le X_L \le \infty$ та $R = const$.



$0 \le R \le \infty$ $0 \le X_L \le \infty$

а) б)

Рисунок 3.11

Годографом у випадку а) є дуга кола, що проходить через початок координат (рис.3.11,а). Годографом у випадку б) є дуга кола, що також проходить через початок координат (рис.3.11,б).

Висновок: зворотна величина лінійної функції $\vec{N} = \vec{A} + \vec{B}$ на комплексній площині представлена рівнянням дуги кола, що проходить через початок координат

$$\vec{W} = \frac{1}{\vec{N}} = \frac{1}{\vec{A}+\vec{B}} = \frac{1/\vec{A}}{1+\dfrac{\vec{B}}{\vec{A}}} = \frac{\vec{C}}{1+K\cdot e^{j\cdot\delta}},$$

$$\text{де } \vec{C} = \frac{1}{\vec{A}};\ \vec{B} = B\cdot e^{j\cdot\beta};\ \vec{A} = A\cdot e^{j\cdot\alpha}; \qquad (3.27)$$

$$\frac{\vec{B}}{\vec{A}} = \frac{B}{A}\cdot e^{j\cdot(\beta-\alpha)} = K\cdot e^{j\cdot\delta}.$$

Таким чином, основне рівняння дуги кола, що проходить через початок координат на комплексній площині

$$\vec{W} = \frac{\vec{C}}{1+K\cdot e^{j\cdot\delta}}. \qquad (3.28)$$

Основне рівняння дуги кола, що не проходить через початок координат на комплексній площині

$$\vec{W} = \vec{W}_L + \frac{\vec{C}}{1+K\cdot e^{j\cdot\delta}} \qquad (3.29)$$

3.5.3 Кругова діаграма струму для двох послідовно з'єднаних опорів

Розглянемо схему на рис.3.12, для якої $\underline{Z}_1 = Z_1\cdot e^{j\varphi_1} = const$, $\underline{Z} = Z\cdot e^{j\varphi}$, де $Z = \text{var}$, $\varphi = const$.

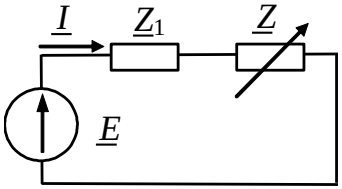


Рисунок 3.12

Доведемо, що струм $\underline{I}$ буде мати кругову діаграму:

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1+\underline{Z}} = \frac{\underline{E}/\underline{Z}_1}{1+\underline{Z}/\underline{Z}_1}. \qquad (3.30)$$

Позначимо

$$\frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1} = \underline{I}_{кз}, \tag{3.31}$$

а також врахуємо, що

$$\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_1} = \frac{Z}{Z_1} \cdot e^{j\cdot(\varphi-\varphi_1)} = \frac{Z}{Z_1} \cdot e^{j\cdot\delta}, \tag{3.32}$$

де

$$\delta = \varphi - \varphi_1. \tag{3.33}$$

Таким чином,

$$\underline{I} = \frac{\underline{I}_{кз}}{1 + \frac{Z}{Z_1} \cdot e^{j\delta}}. \tag{3.34}$$

Якщо порівняти (3.34) з (3.28), то зрозуміло, що це – рівняння дуги кола, що проходить через початок координат на комплексній площині.

РОЗДІЛ 4 ТРИФАЗНІ КОЛА

4.1 Основні поняття і визначення

Сукупність електричних кіл, в яких діють створені спільним джерелом синусоїдні електрорушійні сили (ЕРС) однакової частоти й амплітуди, але які відрізняються один від одного на кут $\frac{2 \cdot \pi}{m}$ (m – кількість фаз) – це багатофазні симетричні системи. Багатофазні системи бувають дво-, три-, чотири-, шести-, дванадцятифазними.

Трифазна симетрична система ЕРС – сукупність трьох синусоїдних ЕРС одної частоти, що мають однакові амплітуди та зсунуті між собою на 120°.

Принцип отримання трифазної системи ЕРС: у рівномірному магнітному полі з постійною кутовою швидкістю ω обертаються 3 однакові жорстко скріплені одна з одною котушки. Площини котушок зміщені у просторі одна відносно іншої на кут 120°. У кожній котушці наводяться ЕРС однакової частоти і амплітуди, зсунуті за кутом 120° одна відносно іншої (рис.4.1).

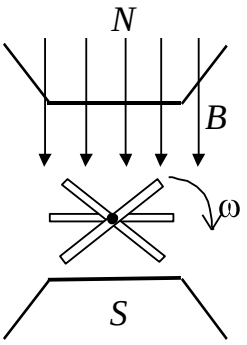


Рисунок 4.1

Графік миттєвих значень ЕРС e_A, e_B, e_C зображений на рис.4.2, а векторні діаграми – на рис.4.3.

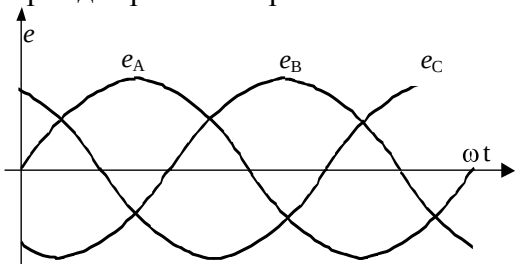


Рисунок 4.2

Чергування фаз – послідовність проходження ЕРС через однакові значення (наприклад, через нуль). Таке чергування фаз, коли початкова фаза ЕРС e_A дорівнює нулю, початкова фаза ЕРС e_B дорівнює "-120°", а початкова фаза ЕРС e_C дорівнює "+120°", називається *прямим*; миттєві значення фазних ЕРС при цьому:

$$e_A = E_m \cdot \sin \omega \cdot t; \quad e_B = E_m \cdot \sin \left(\omega \cdot t - 120^0 \right); \quad e_C = E_m \cdot \sin \left(\omega \cdot t + 120^0 \right). \tag{4.1}$$

Трифазне коло – сукупність трифазної системи ЕРС, трифазного навантаження чи навантажень та з'єднуючих проводів.

Фаза – ділянка трифазного кола, по якій проходить один і той самий струм.

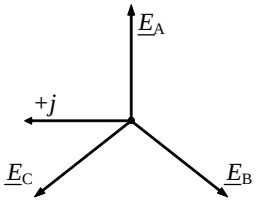


Рисунок 4.3

Переваги трифазних систем порівняно з іншими багатофазними системами:

1) передача енергії на великі відстані трифазним струмом більш економічна з точки зору економії металу;

2) елементи трифазної системи такі, як асинхронний двигун, трифазний генератор і трансформатор є простими у виробництві, економічні, надійні в роботі;

3) система має властивості незмінності величини миттєвої потужності за період синусоїдного струму, якщо навантаження в усіх трьох фазах однакове.

Усі ланки трифазного кола були розроблені російським вченим М.О. Доліво-Добровольским. Виводам фазних обмоток генераторів надають найменування "початок" і "кінець". Початки позначають буквами A, B, C, а кінці - x, y, z.

4.2 Аналіз основних схем з'єднання трифазних кіл

Основні схеми з'єднання у трифазних колах - це схеми з'єднання зіркою і трикутником.

4.2.1 З'єднання обмоток генератора зіркою

Якщо всі "початки" або всі "кінці" фазних обмоток з'єднані в один вузол (нейтральну точку чи, якщо вона заземлена, в нульову) – таке з'єднання називається *зіркою* (рис.4.4).

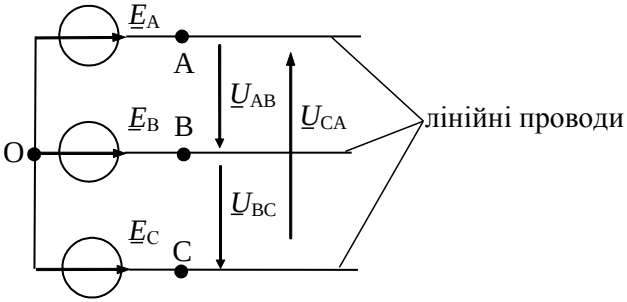


Рисунок 4.4

Проводи, що з'єднують обмотки генератора або трансформатора з навантаженням, називаються *лінійними*, а провід, що з'єднує нейтральні або нульові точки генератора і навантаження, відповідно *нейтральним* або *нульовим*.

Співвідношення між фазними й лінійними напругами

Напруги між початком і кінцем обмотки генератора ($\underline{U}_{AO} = \underline{E}_A$, $\underline{U}_{BO} = \underline{E}_B, \underline{U}_{CO} = \underline{E}_C$) або на фазних навантаженнях ($\underline{U}_{aO_1}, \underline{U}_{вO_1}, \underline{U}_{cO_1}$ - рис.4.7) – це фазні напруги.

Лінійні напруги дорівнюють різниці потенціалів між точками A, B, C або різниці фазних напруг:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{AO} - \underline{U}_{BO};\ \underline{U}_{BC} = \underline{U}_{BO} - \underline{U}_{CO};\ \underline{U}_{CA} = \underline{U}_{CO} - \underline{U}_{AO}.$$

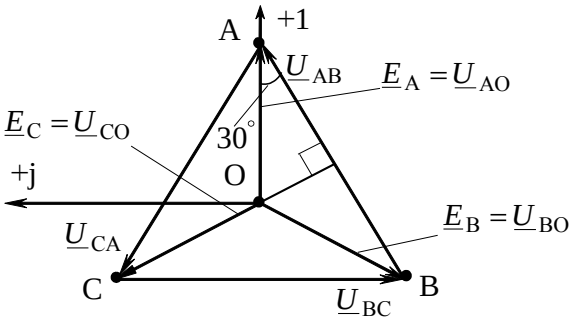


Рисунок 4.5

Відповідно до виразів (4.2) побудуємо векторну діаграму лінійних та фазних напруг (рис.4.5), з якої видно, що при прямому чергуванні фаз лінійні напруги в $\sqrt{3}$ більші, ніж фазні й випереджають їх на 30°, тобто співвідношення між комплексами лінійних та фазних напруг мають вигляд

$$\underline{U}_{AB} = \sqrt{3}\cdot\underline{U}_{AO}\cdot e^{j30^0};\ \ \underline{U}_{BC} = \sqrt{3}\cdot\underline{U}_{BO}\cdot e^{j30^0};$$
$$\underline{U}_{CA} = \sqrt{3}\cdot\underline{U}_{CO}\cdot e^{j30^0}. \qquad (4.3)$$

4.2.2 З'єднання обмоток генератора трикутником

При з'єднанні в трикутник фазні обмотки генератора, трансформатора або навантаження з'єднані один з одним послідовно таким чином, що "початок" однієї фази генератора (або навантаження) з'єднується з "кінцем" іншої фази (рис.4.6), а кожна фаза навантаження вмикається між лінійними проводами, внаслідок чого вона знаходиться під лінійною напругою. Лінійна напруга одночасно є і фазною напругою, тобто $\underline{U}_{л} = \underline{U}_{Ф}$.

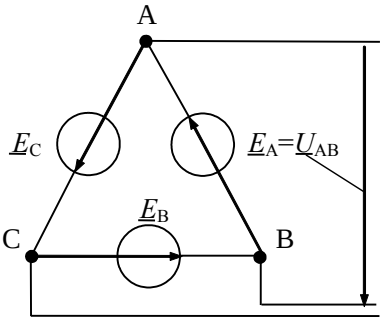


Рисунок 4.6

Якщо до затискачів генератора не під'єднане навантаження, то по обмотках не проходитиме струм, тому що:

$$\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = \\ = E \cdot \left(+1 \cdot e^{j120^\circ} + 1 \cdot e^{j120^\circ}\right) = 0.$$

4.2.3 З'єднання обмоток генератора та трифазного навантаження за типом "зірка-зірка"

При з'єднанні "зірка-зірка" обмотки генератора й фазні навантаження поєднуються зіркою. Таке трифазне коло може бути без нейтрального провода (трипровідна система, (рис.4.7)) або з ним (чотирипровідна система (рис.4.8)).

Проводи, що з'єднують генератор та навантаження, називаються лінійними, струми, що проходять по них – лінійні струми ($\underline{I}_A$, $\underline{I}_B$, $\underline{I}_C$), а напруга між лінійними проводами – лінійна напруга ($\underline{U}_{AB}$, $\underline{U}_{BC}$, $\underline{U}_{CA}$). Для схем рис.4.7 і рис.4.8 фазні струми, що проходять по променях зірки, дорівнюють лінійним. Струм, що проходить по нейтральному проводу (рис.4.8), – струм нейтрального або нульового провода ($\underline{I}_N$).

За позитивний напрямок струмів у лінійних проводах береться напрямок від джерела до навантаження, а в нейтральному проводі навпаки – від навантаження до джерела.

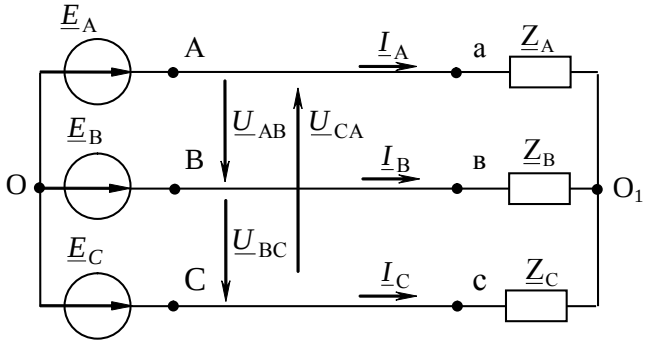


Рисунок 4.7

Струм у нейтральному проводі дорівнює геометричній сумі лінійних струмів (за першим законом Кірхгофа):

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C. \qquad (4.4)$$

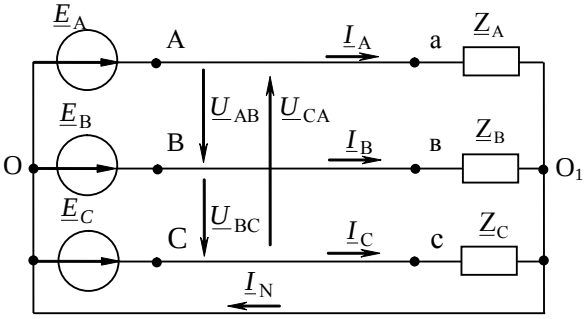


Рисунок 4.8

4.2.4 З’єднання обмоток генератора і трифазного навантаження за типом “трикутник-трикутник”, “зірка-трикутник”

Схема "трикутник-трикутник" характеризується тим, що обмотки генератора і фазні навантаження з’єднані трикутником (рис.4.9), а схема "зірка-трикутник" – тим, що обмотки генератора з’єднані зіркою, а фазні навантаження – трикутником (рис.4.10).

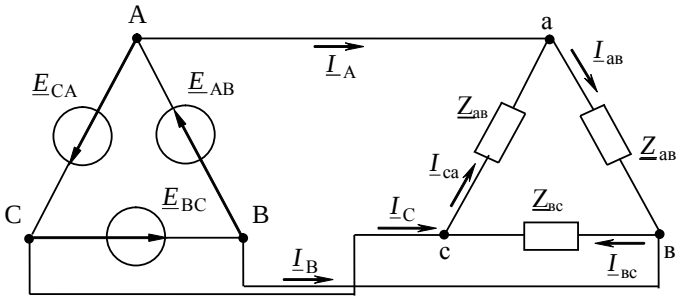


Рисунок 4.9

За позитивний напрямок лінійних струмів ($\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$) береться напрямок від джерела до навантаження. Позитивний напрямок фазних струмів вибирають від точки "а" до "в" (струм $\underline{I}_{ав}$), від точки "в" до "с" (струм $\underline{I}_{вс}$), від точки "с" до "а" (струм $\underline{I}_{ca}$).

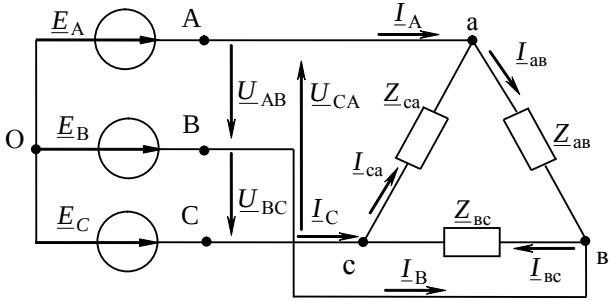


Рисунок 4.10

4.3 Розрахунок трифазних кіл

Трифазне коло є різновидом кіл синусоїдного струму і тому його розрахунок та дослідження здійснюють за допомогою методів, що розглядалися раніше. Вважаємо, що трифазна ЕРС симетрична.

4.3.1 Коло “зірка-зірка”

Розглянемо несиметричне навантаження ($\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C$), коло з нейтральним проводом

За несиметричного навантаження, коли в нейтральному проводі є опір $\underline{Z}_N$ (рис.4.11), потенціали точок О і O_1 не дорівнюють один одному.

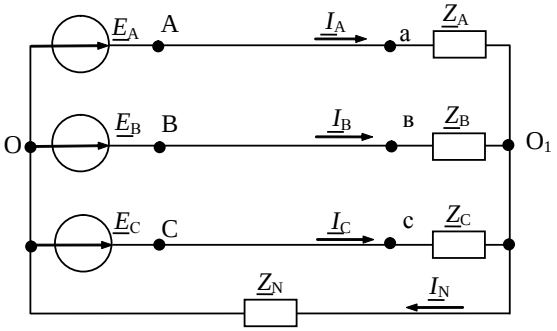


Рисунок 4.11

Розрахунок кола здійснюють в такіій послідовності:

- визначають напругу зміщення нейтралі, тобто напругу $\underline{U}_{O_1O}$, за виразом, що випливає з методу двох вузлів:

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{E}_A \cdot \underline{Y}_A + \underline{E}_B \cdot \underline{Y}_B + \underline{E}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}, \qquad (4.5)$$

де $\underline{Y}_A, \underline{Y}_B, \underline{Y}_C, \underline{Y}_N$ – комплекси фазних провідностей і провідність нейтрального провода:

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A}, \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B}, \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C}, \underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_N}; \qquad (4.6)$$

- визначають фазні напруги на навантаженні:

$$\underline{U}_{aO_1} = \underline{E}_A - \underline{U}_{O_1O}; \ \underline{U}_{вO_1} = \underline{E}_B - \underline{U}_{O_1O}; \ \underline{U}_{cO_1} = \underline{E}_C - \underline{U}_{O_1O}; \quad (4.7)$$

- визначають фазні струми:

$$\underline{I}_A = \underline{U}_{aO_1} \cdot \underline{Y}_A; \ \underline{I}_B = \underline{U}_{вO_1} \cdot \underline{Y}_B; \ \underline{I}_C = \underline{U}_{cO_1} \cdot \underline{Y}_C \ . \qquad (4.8)$$

Струм у нейтральному проводі $\underline{I}_N$ визначають як суму фазних струмів (4.4).

Коли в нейтральному проводі опір $\underline{Z}_N$ відсутній і навантаження несиметричне (рис.4.8) – $\underline{U}_{O_1O} = 0$, і тому фазні струми:

$$\underline{I}_A = \underline{U}_{AO} \cdot \underline{Y}_A; \ \underline{I}_B = \underline{U}_{BO} \cdot \underline{Y}_B; \ \underline{I}_C = \underline{U}_{CO} \cdot \underline{Y}_C \ , \qquad (4.9)$$

а струм нейтрального провода визначають як і в попередньому випадку за виразом (4.4).

Розглянемо несиметричне навантаження ($\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C$), коло без нейтрального проводау.

Якщо навантаження несиметричне та нульовий провід відсутній (рис.4.7), фазні струми установлюються таким чином, що їх сума дорівнює нулю. Внаслідок чого відбувається, як і в випадку несиметричного навантаження за наявності в нейтральному проводі опора $\underline{Z}_N$, викривлення симетрії фазних напруг так, що навантаження опиняється під різними, не рівними один одному (та фазним ЕРС) напругами. Потенціали точок О та O_1 не дорівнюють один одному. Розрахунок кола здійснюють так:

- визначають напругу зміщення нейтралі, тобто напругу $\underline{U}_{O_1O}$:

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{E}_A \cdot \underline{Y}_A + \underline{E}_B \cdot \underline{Y}_B + \underline{E}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}; \qquad (4.10)$$

- визначають фазні напруги на навантаженні за виразами (4.7);

- визначають фазні струми за виразами (4.8).

4.3.1.3 Симетричне навантаження ($\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C$)

За симетричного навантаження в усіх випадках, що відповідають схемам рис.4.7, рис.4.8, рис.4.11, потенціали точок О і O_1 дорівнюють один одному.

Для схеми рис.4.7 та для схеми рис.4.11 відповідно:

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{Y}_A \cdot \left(\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C\right)}{3 \cdot \underline{Y}_A} = 0;$$

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{Y}_A \cdot \left(\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C\right)}{3 \cdot \underline{Y}_A + \underline{Y}_N} = 0, \qquad (4.11)$$

тому що $\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = E \cdot \left(+1 \cdot e^{j120^\circ} + 1 \cdot e^{j120^\circ}\right) = 0$.

Для схеми рис.4.8 $\underline{U}_{O_1O} = 0$, тому що нейтральний провід вирівнює потенціали точок О та O_1. Тоді фазні струми визначають за виразами (4.8) (з урахуванням того, що

$\underline{U}_{aO_1} = \underline{U}_{AO} = \underline{E}_A$; $\underline{U}_{вO_1} = \underline{U}_{BO} = \underline{E}_B$; $\underline{U}_{cO_1} = \underline{U}_{CO} = \underline{E}_C$), вони однакові за модулем і зсунуті за фазою на кут 120°. Струм нульового провода (для рис. 4.8 та рис. 4.11) – $\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0$.

4.3.2 Кола “трикутник-трикутник” і “зірка-трикутник”

Розглянемо кола “трикутник-трикутник” і “зірка-трикутник” без урахування опорів підводячих проводів.

Взагалі розрахунок кіл “трикутник-трикутник” (рис.4.9) і “зірка-трикутник” (рис.4.10) відрізняються тільки величиною напруги на фазних навантаженнях ($\underline{U}_{\text{ф. навантаження}}$): у випадку кола “трикутник-трикутник” - $\underline{U}_{\text{ф. навантаження}} = \underline{U}_{\text{ф. генератора}}$, а у випадку кола “зірка-трикутник” –

$$\underline{U}_{\text{ф. навантаження}} = \underline{U}_{\text{лінійне генератора}} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{\text{ф}} \cdot \angle 30^\circ .$$

Далі будемо розглядати коло “зірка-трикутник”, розрахунок якого проводять у такій послідовності:

- комплекси фазних струмів визначають за виразами:

$$\underline{I}_{\text{ав}} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{\text{ав}}} = \underline{U}_{AB} \cdot \underline{Y}_{\text{ав}}; \; \underline{I}_{\text{вс}} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{\text{вс}}} = \underline{U}_{BC} \cdot \underline{Y}_{\text{вс}}; \quad \underline{I}_{\text{са}} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{\text{са}}} = \underline{U}_{CA} \cdot \underline{Y}_{\text{са}}, \tag{4.12}$$

де $\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \underline{U}_{CA}$ – лінійні напруги (4.3);

$\underline{Y}_{\text{ав}}, \underline{Y}_{\text{вс}}, \underline{Y}_{\text{са}}$ – комплекси фазних провідностей:

$$\underline{Y}_{\text{ав}} = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{ав}}}; \; \underline{Y}_{\text{вс}} = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{вс}}}; \; \underline{Y}_{\text{са}} = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{са}}} . \tag{4.13}$$

Лінійні струми визначають за першим законом Кірхгофа для вузлів а, в, с:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{\text{ав}} - \underline{I}_{\text{са}}; \underline{I}_B = \underline{I}_{\text{вс}} - \underline{I}_{\text{ав}}; \underline{I}_C = \underline{I}_{\text{са}} - \underline{I}_{\text{вс}} . \tag{4.14}$$

При симетричному режимі фазні струми в усіх фазах однакові й зсунуті відносно своїх фазних напруг на однаковий кут, що визначається співвідношенням

$$\varphi = arctg\frac{X_{\text{ф}}}{R_{\text{ф}}}\ , \qquad (4.15)$$

де $X_{\text{ф}}$ - реактивний опір навантаження; $R_{\text{ф}}$ - активний опір навантаження.

Лінійні струми при цьому за модулем будуть рівними між собою, в $\sqrt{3}$ разів більшими, ніж фазні струми, а за фазою будуть відставати на кут 30^0 при прямому чергуванні фаз, тобто

$$\underline{I}_{\text{A}} = \sqrt{3}\cdot\underline{I}_{\text{ав}}\angle -30^{\circ};\ \underline{I}_{\text{B}} = \sqrt{3}\cdot\underline{I}_{\text{вс}}\angle -30^{\circ};$$
$$\underline{I}_{\text{C}} = \sqrt{3}\cdot\underline{I}_{\text{са}}\angle -30^{\circ}. \qquad (4.16)$$

Таким чином, при симетричному навантаженні фаз розрахунок трифазного кола можна звести до розрахунку однієї фази.

При несиметричному навантаженні лінійні струми можуть бути більшими чи меншими, ніж фазні струми.

4.3.2.2 Кола “трикутник-трикутник” і “зірка-трикутник” з урахуванням опорів підводячих проводів

Розглянемо загальний випадок такого кола, коли опори в лініях не дорівнюють один одному ($\underline{Z}_{\text{ла}} \neq \underline{Z}_{\text{лв}} \neq \underline{Z}_{\text{лс}}$) і навантаження фаз несиметричне (рис.4.12).

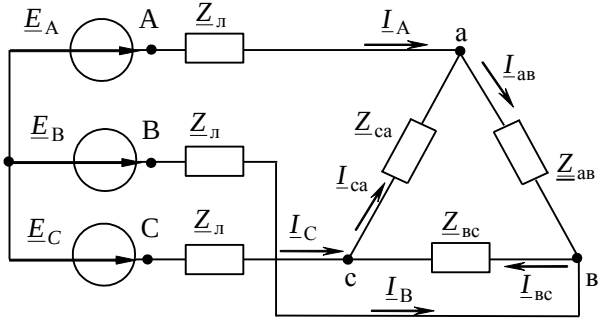


Рисунок 4.12

Розрахунок такої схеми слід виконувати шляхом заміни трикутника опорів еквівалентною зіркою. Опори променів зірки:

$$\underline{Z}'_{\text{а}} = \frac{\underline{Z}_{\text{ав}} \cdot \underline{Z}_{\text{са}}}{\underline{Z}_{\text{ав}} + \underline{Z}_{\text{вс}} + \underline{Z}_{\text{са}}};\ \underline{Z}'_{\text{в}} = \frac{\underline{Z}_{\text{вс}} \cdot \underline{Z}_{\text{ав}}}{\underline{Z}_{\text{ав}} + \underline{Z}_{\text{вс}} + \underline{Z}_{\text{са}}};$$

$$\underline{Z}'_{\text{с}} = \frac{\underline{Z}_{\text{са}} \cdot \underline{Z}_{\text{вс}}}{\underline{Z}_{\text{ав}} + \underline{Z}_{\text{вс}} + \underline{Z}_{\text{са}}}. \qquad (4.17)$$

Якщо навантаження фаз симетричне, тобто $\underline{Z}_{\text{ав}} = \underline{Z}_{\text{вс}} = \underline{Z}_{\text{са}} = \underline{Z}_{\text{ф}}$, то опір променів еквівалентної зірки

$$\underline{Z}'_{\text{а}} = \underline{Z}'_{\text{в}} = \underline{Z}'_{\text{с}} = \frac{\underline{Z}_{\text{ф}}}{3}. \qquad (4.18)$$

У результаті перетворення одержуємо еквівалентну схему, зображену на рис. 4.13, лінійні струми якої ($\underline{I}_{\text{A}}, \underline{I}_{\text{B}}, \underline{I}_{\text{C}}$) в загальному випадку розраховується як у схемі "зірка-зірка" при несиметричному навантаженні, а саме:

- визначають повні опори ($\underline{Z}_{\text{A}}$, $\underline{Z}_{\text{B}}$, $\underline{Z}_{\text{C}}$) та провідності ($\underline{Y}_{\text{A}}$, $\underline{Y}_{\text{B}}$, $\underline{Y}_{\text{C}}$) кожної фази, враховуючи що опори з'єднувальних проводів ввімкнені послідовно з опорами відповідних променів еквівалентної зірки:

$$\underline{Z}_{\text{A}} = \underline{Z}'_{\text{а}} + \underline{Z}_{\text{ла}};\ \underline{Y}_{\text{A}} = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{A}}};$$

$$\underline{Z}_{\text{B}} = \underline{Z}'_{\text{в}} + \underline{Z}_{\text{лв}};\ \underline{Y}_{\text{B}} = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{B}}}; \qquad (4.19)$$

$$\underline{Z}_{\text{C}} = \underline{Z}'_{\text{с}} + \underline{Z}_{\text{лс}};\ \underline{Y}_{\text{C}} = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{C}}}.$$

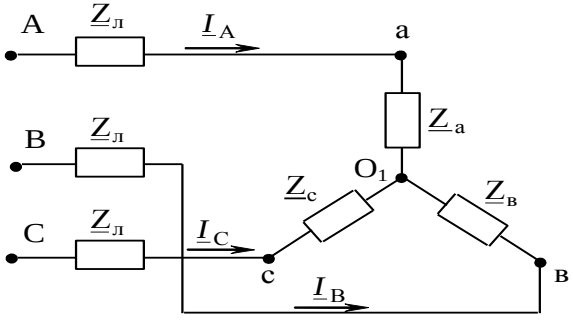


Рисунок 4.13

- визначають напругу зміщення нейтралі $\underline{U}_{O_1O} = \dfrac{\underline{E}_A \cdot \underline{Y}_A + \underline{E}_B \cdot \underline{Y}_B + \underline{E}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}$;

- визначають лінійні струми $\underline{I}_A = (\underline{E}_A - \underline{U}_{O_1O}) \cdot \underline{Y}_A$, $\underline{I}_B = (\underline{E}_B - \underline{U}_{O_1O}) \cdot \underline{Y}_B$, $\underline{I}_C = (\underline{E}_C - \underline{U}_{O_1O}) \cdot \underline{Y}_C$.

Фазні струми в навантаженнях $\underline{Z}_{ав}; \underline{Z}_{вс}; \underline{Z}_{са}$ вихідної схеми (рис.4.12) визначають за законом Ома:

$$\underline{I}_{ав} = \frac{\underline{U}_{ав}}{\underline{Z}_{ав}}; \underline{I}_{вс} = \frac{\underline{U}_{вс}}{\underline{Z}_{вс}}; \underline{I}_{са} = \frac{\underline{U}_{са}}{\underline{Z}_{са}}, \qquad (4.20)$$

де $\underline{U}_{ав}; \underline{U}_{вс}; \underline{U}_{са}$ – лінійні напруги на навантаженні:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{ав} &= \underline{U}_{aO_1} - \underline{U}_{вO_1} = \underline{I}_A \cdot \underline{Z}_a - \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_в; \\ \underline{U}_{вс} &= \underline{U}_{вO_1} - \underline{U}_{cO_1} = \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_в - \underline{I}_C \cdot \underline{Z}_c; \\ \underline{U}_{са} &= \underline{U}_{cO_1} - \underline{U}_{aO_1} = \underline{I}_C \cdot \underline{Z}_c - \underline{I}_A \cdot \underline{Z}_a. \end{aligned} \qquad (4.21)$$

4.4 Аварійні режими в трифазних колах

4.4.1 Схема "зірка-зірка"

Обрив лінійного провода в колі "зірка-зірка" з нейтральним проводом (рис. 4.14).

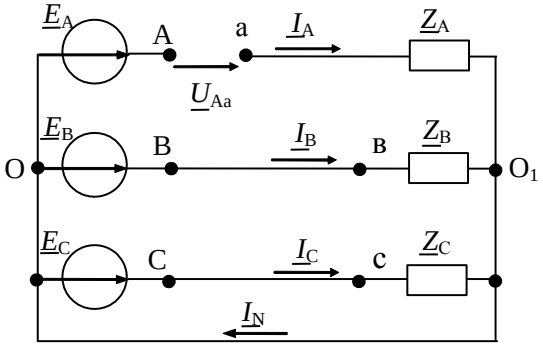


Рисунок 4.14

У цьому випадку (рис.4.14) $\underline{I}_A = 0$, а фазні струми

$\underline{I}_{\text{B}}, \underline{I}_{\text{C}}$ залишаються тими ж, що і в колі "зірка-зірка", тобто:

$$\underline{I}_{\text{B}} = \frac{\underline{U}_{\text{BO}}}{\underline{Z}_{\text{B}}},\ \underline{I}_{\text{C}} = \frac{\underline{U}_{\text{CO}}}{\underline{Z}_{\text{C}}}. \qquad (4.22)$$

Струм у нульовому проводі:

$$\underline{I}_{\text{N}} = \underline{I}_{\text{B}} + \underline{I}_{\text{C}}. \qquad (4.23)$$

Фазні напруги на навантаженні:

$$\underline{U}_{\text{aO}_1} = 0, \underline{U}_{\text{вO}_1} = \underline{U}_{\text{BO}},\ \underline{U}_{\text{cO}_1} = \underline{U}_{\text{CO}}. \qquad (4.24)$$

Напруга на затискачах розриву дорівнює фазній напрузі:

$$\underline{U}_{\text{Aa}} = \underline{U}_{\text{AO}}. \qquad (4.25)$$

Обрив лінійного провода в схемі "зірка-зірка" без нейтрального провода (у схемі рис.4.14 треба вимкнути нейтральний провід).

У цьому випадку лінійна напруга $\underline{U}_{\text{BC}}$ прикладається до послідовного з'єднання двох опорів $\underline{Z}_{\text{B}}$ і $\underline{Z}_{\text{C}}$; і якщо $\underline{Z}_{\text{B}} = \underline{Z}_{\text{C}}$ вона (напруга) рівномірно розподіляється між цими опорами. Струми

$$\underline{I}_{\text{в}} = -\underline{I}_{\text{C}} = \frac{\underline{U}_{\text{BC}}}{\underline{Z}_{\text{B}} + \underline{Z}_{\text{C}}}. \qquad (4.26)$$

Напруга на затискачах розриву дорівнює:

$$\underline{U}_{\text{Aa}} = \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_{\text{B}} - \underline{E}_{\text{B}} + \underline{E}_{\text{A}} = \underline{U}_{\text{AB}} + \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_{\text{B}}, \qquad (4.27)$$

і якщо

$$\underline{Z}_{\text{B}} = \underline{Z}_{\text{C}}, \text{то}\ \ \underline{U}_{\text{Aa}} = 1{,}5 \cdot \underline{U}_{\text{AO}}. \qquad (4.28)$$

Напруга зміщення нейтралі:

$$\underline{U}_{\text{O}_1\text{O}} = \underline{U}_{\text{BO}} - \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_{\text{B}}. \qquad (4.29)$$

Коротке замикання у фазі

(схема "зірка-зірка" без нульового провода - рис. 4.15)

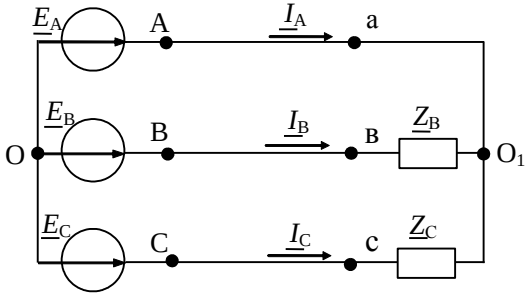


Рисунок 4.15

Напруга зміщення нейтралі

$$\underline{U}_{O_1O} = \underline{E}_A . \tag{4.30}$$

Напруги на навантаженнях:

$$\underline{U}_{aO_1} = 0 , \underline{U}_{вO_1} = \underline{U}_{BO} - \underline{U}_{O_1O} , \quad \underline{U}_{cO_1} = \underline{U}_{CO} - \underline{U}_{O_1O} . \tag{4.31}$$

Фазні струми:

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_{вO_1}}{\underline{Z}_B} , \ \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{CO_1}}{\underline{Z}_B} , \ \underline{I}_A = -(\underline{I}_B + \underline{I}_C) . \tag{4.32}$$

4.4.2 Схема "зірка-трикутник"

Обрив одного з фазних проводів (рис.4.16)

При обриві одного з фазних проводів, наприклад, у фазі "вс" (рис.4.16), фазний струм $\underline{I}_{вс} = 0$, струми $\underline{I}_{ca}$ та $\underline{I}_{ав}$ залишаються без змін. Тому лінійний струм $\dot{I}_A = \dot{I}_{ав} - \dot{I}_{ca}$ зберігає своє значення, а лінійні струми $\underline{I}_B$ та $\underline{I}_C$ змінюються: $\underline{I}_B = -\underline{I}_{ав}; \underline{I}_C = \underline{I}_{ca}$. Таким чином, зміна навантаження в одній з фаз зумовлює одночасну зміну двох лінійних струмів і не впливає на величину фазних напруг, струмів двох інших фаз і на величину третього лінійного струму.

Обрив лінійного провода у фазі А (рис.4.17)

При обриві одного з лінійних проводів, наприклад, у фазі "А", режим роботи схеми змінюється. Опір фази "вс" буде, як і

раніше, знаходитися під нормальною лінійною напругою $\underline{U}_{\text{BC}}$, струм $\underline{I}_{\text{вс}}$ у цій фазі не зміниться. Опори фаз "ав" і "са" виявляться послідовно з'єднаними та увімкненими до напруги "$-\underline{U}_{\text{BC}}$".

Якщо $\underline{Z}_{\text{ав}} = \underline{Z}_{\text{са}}$, то напруга "$-\underline{U}_{\text{BC}}$" розподілиться між ними порівну, а якщо $\underline{Z}_{\text{ав}} \neq \underline{Z}_{\text{са}}$, то напруга "$-\underline{U}_{\text{BC}}$" розподілиться прямо пропорційно величинам цих опорів, при цьому у фазах "ав" і "са" проходитиме один і той самий струм:

$$\underline{I}_{\text{ав}} = \underline{I}_{\text{са}} = \frac{-\underline{U}_{\text{BC}}}{\underline{Z}_{\text{ав}} + \underline{Z}_{\text{са}}}. \qquad (4.33)$$

Лінійні струми визначаються так:

$$\underline{I}_{\text{B}} = -\underline{I}_{\text{C}} = \underline{I}_{\text{вс}} - \underline{I}_{\text{са}}; \underline{I}_{\text{A}} = 0. \qquad (4.34)$$

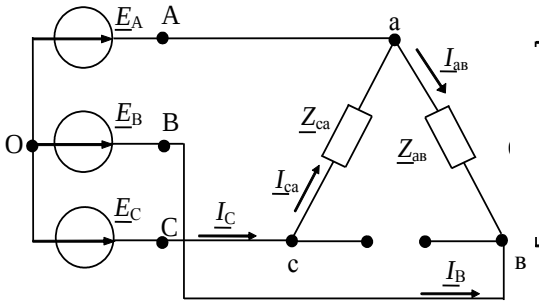


Рисунок 4.16

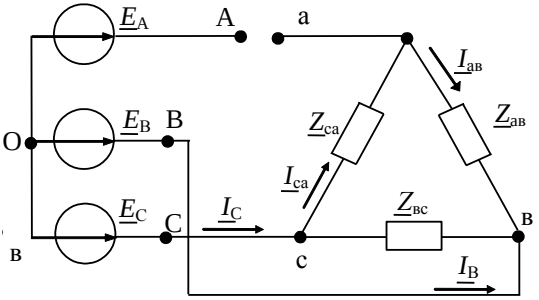


Рисунок 4.17

РОЗДІЛ 5 КОЛА ІЗ ВЗАЄМНОЮ ІНДУКТИВНІСТЮ

5.1 Поняття взаємної індуктивності

Якщо зміна струму в одному елементі кола призводить до появи ЕРС в іншому елементі кола, то говорять, що ці два елементи *індуктивно зв'язані*, а ЕРС, що виникає при цьому, називається ЕРС взаємної індукції (e_M). Кола, в яких крім ЕРС самоіндукції наводяться ЕРС взаємної індукції, називаються *індуктивно* або *магнітозв'язаними* колами.

(*Примітка*: явище самоіндукції – явище наведення в якомусь контурі ЕРС при зміні струму, що проходить по цьому ж контуру).

Нехай є дві котушки (рис.5.1), умовно подані у вигляді витків і віддалені одна від одної на деяку відстань.

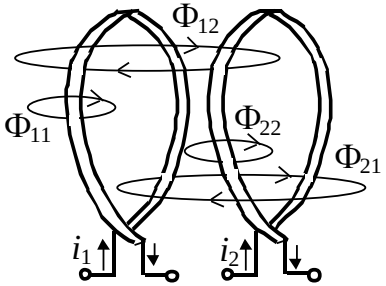


Рисунок 5.1

По котушках проходять синусоїдні струми i_1 і i_2. Витки 1-ї котушки зчеплені з магнітним потоком самоіндукції Φ_1:

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}, \qquad (5.1)$$

де Φ_{11} – частина магнітного потоку Φ_1, який замикається, проходячи тільки через перший контур;

Φ_{12} – частина потоку Φ_1, який замикається, проходячи через другий контур.

Аналогічно для другого контура:

$$\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21}. \qquad (5.2)$$

Зрозуміло, що кожна котушка зчеплена з двома магнітними потоками: самоіндукції і взаємоіндукції.

Повне потокозчеплення 1-го і 2-го контурів:

$$\Psi_{1\text{п}} = w_1 \cdot \Phi_1 \pm \Phi_{21} = \Psi_1 \pm \Psi_{21},$$
$$\Psi_{2\text{п}} = w_2 \cdot \Phi_2 \pm \Phi_{12} = \Psi_{22} \pm \Psi_{12}, \qquad (5.3)$$

де w_1, w_2 – число витків 1 і 2 контурів;

Знак «+» у формулі (5.3) ставиться в тому випадку, коли потік самоіндукції (створюється струм ом власного контура) і потік взаємної індукції направлені узгоджено.

Введемо поняття *взаємної індуктивності* М (Гн), яка дозволяє при розрахунках врахувати явище взаємоіндукції і явище накопичення енергії в магнітному полі індуктивно зв'язаних котушок. Для нашого випадку:

$$\text{M} = \text{M}_{12} = \text{M}_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_2} = \frac{\Psi_{12}}{i_1}. \qquad (5.4)$$

Взаємна індуктивність М залежить від взаємного розташування, геометричних розмірів котушок, числа витків і від μ (відносна магнітна проникність осердя); вона може бути визначена за допомогою досліду.

Коефіцієнт індуктивного зв'язку між двома контурами з індуктивностями L_1 і L_2 і взаємною індуктивністю М

$$k = \frac{\text{M}}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}. \qquad (5.5)$$

Зрозуміло, що $k \le 1$. Коефіцієнт індуктивного зв'язку $k = 1$, якщо весь потік, що створюється 1-м контуром, буде зчеплений з другим контуром і залежить від взаємного розташування контурів (зміна індуктивного зв'язку досягається переміщенням однієї котушки відносно іншої).

Відмітимо, що М може бути більше L_1 (або L_2), але не може бути більше і L_1, і L_2 одночасно.

5.2 Розрахунок електричних кіл за наявності в них індуктивно зв'язаних котушок

При складанні рівнянь для індуктивно зв'язаних кіл необхідно знати узгоджено або зустрічно направлені потоки самоіндукції і взаємоіндукції (або ще говорять: *узгоджено* або *зустрічно* включені котушки), тобто знати напрям намотування витків котушок і напрям струму в них.

Котушки включені узгоджено , якщо струми в них однаково орієнтовані щодо однойменних затискачів, які на схемах позначаються «⁎» або «•». При узгодженому включенні котушок ЕРС самоіндукції і взаємоіндукції складаються.

На прикладі рис.5.2 розглянемо методику складання рівнянь за законами Кірхгофа для розрахунку магнітозв'язаних кіл (включення котушок – узгоджене):

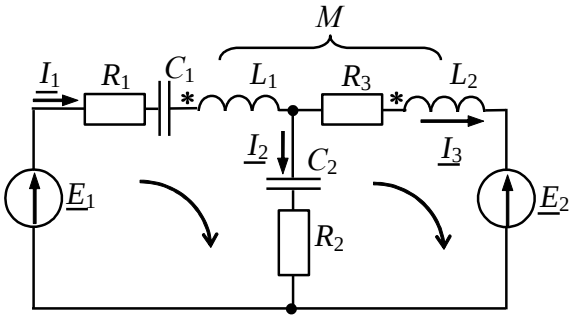


Рисунок 5.2

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3, \\ i_1 \cdot R_1 + \dfrac{1}{C_1} \cdot \int i_1 \mathrm{d}t + L_1 \cdot \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \cdot \dfrac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{C_2} \cdot \int i_2 \mathrm{d}t + i_2 \cdot R_2 = e_1, \\ i_3 \cdot R_3 + L_2 \cdot \dfrac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} + M \cdot \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - \dfrac{1}{C_2} \cdot \int i_2 \mathrm{d}t - i_2 \cdot R_2 = e_2. \end{cases} \qquad (5.6)$$

де $L_1 \cdot \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \cdot \frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t}$, $L_2 \cdot \frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} + M \cdot \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$ - падіння напруги в 1 і 2 котушках відповідно.

Перейдемо до системи рівнянь у комплексній формі:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3, \\ \underline{I}_1\left(R_1 - j \cdot \frac{1}{\omega C_1} + j \cdot \omega L_1\right) + \underline{I}_2\left(R_2 - j \cdot \frac{1}{\omega C_2}\right) + \underline{I}_3 j\omega M = \underline{E}_1, \\ \underline{I}_1 \cdot j\omega M + \underline{I}_3 \cdot (R_3 + j \cdot \omega L_2) - \underline{I}_2 \cdot \left(R_2 - j \cdot \frac{1}{\omega C_2}\right) = \underline{E}_2. \end{cases} \quad (5.7)$$

Величина $X_{\text{М}} = \omega \cdot M$ - реактивний опір взаємної індуктивності, Ом.

Величина $\underline{Z} = j \cdot \omega \cdot M$ - комплексний опір взаємної індуктивності.

5.3 Визначення взаємної індуктивності

Розглянемо рис. 5.3 - послідовне включення двох індуктивно зв'язаних котушок.

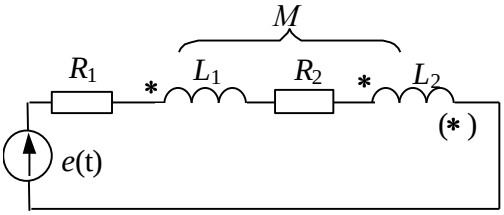


Рисунок 5.3

Нехай включення котушок – узгоджене. За другим законом Кірхгофа:

$$i \cdot R_1 + L_1 \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + M \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_2 \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + M \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i \cdot R_2 = e, \quad (5.8)$$

або:

$$\underline{I} \cdot (R_1 + R_2 + j\omega \cdot (L_1 + L_2 + 2 \cdot M)) = \underline{E} \quad \Rightarrow \quad (5.9)$$

Таким чином, комплексний опір кола в цьому випадку

$$\underline{Z}_{\text{узг.}} = R_1 + R_2 + j\omega \cdot (L_1 + L_2 + 2 \cdot M) = R_1 + R_2 + j\omega \cdot X_{\text{зг}}. \qquad (5.10)$$

Нехай включення котушок – зустрічне (∗). За другим законом Кірхгофа:

$$i \cdot R_1 + L_1 \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - M \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_2 \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - M \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i \cdot R_2 = e, \qquad (5.11)$$

або:

$$\underline{I} \cdot (R_1 + R_2 + j\omega \cdot (L_1 + L_2 - 2 \cdot M) = \underline{E}\ . \qquad (5.12)$$

Комплексний опір кола в цьому випадку:

$$\underline{Z}_{\text{зустр.}} = R_1 + R_2 + j\omega \cdot (L_1 + L_2 - 2 \cdot M) = R_1 + R_2 + j\omega \cdot X_{\text{зустр.}} \qquad (5.13)$$

Отже, $X_{\text{узг.}} - X_{\text{зустр.}} = 4 \cdot \omega \cdot M = 4 \cdot X_{\text{M}}$, звідки:

$$M = \frac{\text{X}_{\text{узг.}} - \text{X}_{\text{зустр}}}{4 \cdot \omega}. \qquad (5.14)$$

Вираз (5.14) використовується для визначення шляхом досліду взаємної індуктивності М.

Розділ 6 НЕСИНУСОЇДАЛЬНІ СТРУМИ

Розрахунки електричних кіл, виконані раніше, проводилися у припущенні, що джерела енергії були або постійними, або синусоїдальними та викликали в елементах кіл постійні або синусоїдальні струми. У реальних умовах криві ЕРС, напруги та струму лише у певних межах можуть вважатися синусоїдальними, при цьому зазначені параметри кіл можуть мати характер періодичний, квазіперіодичний (майже періодичний) і неперіодичний. Це відбувається за рахунок наявності у електричних колах нелінійних елементів: вентиль (діод), електрична дуга, котушка зі сталевим осердям (дросель), різного роду електричні перешкоди і т.д., які спотворюють синусоїдальну функцію, приводячи до появи несинусоїдальних функцій струмів і напруг, крім того, саме джерело енергії може бути генератором несинусоїдальної ЕРС (рис. 6.1).

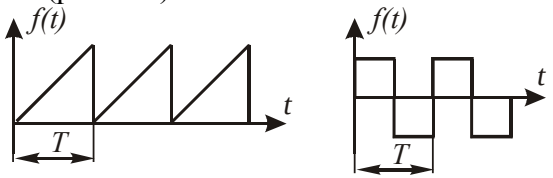


Рисунок 6.1 – Приклад несинусоїдальних періодичних функцій

6.1 Розкладання періодичної функції в тригонометричний ряд

У всіх завданнях, де доводиться мати справу з періодичними несинусоїдальними функціями струмів, ЕРС і напруг, необхідно звести їх до більш простого виду, для якого можливе застосування відомих методів розрахунків. Процеси, що відбуваються в лінійних електричних колах при несинусоїдальних струмах і напругах, зручніше за все розраховувати, якщо скористатися тригонометричним рядом Фур'є. У загальному випадку вираз цього ряду набуває вигляду

$$f(\omega t) = A_0 + A_{1msin}(\omega t+\psi_1) + A_{2msin}(2\omega t + \psi_2) + \ldots \qquad (6.1)$$

Запишемо вираз ряду Фур'є

$$f(\omega t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k).$$

Перший доданок називається нульовою гармонікою або постійною складовою ряду, де k – номер гармоніки, при $k = 0$, $\psi k = \pi/2$, $Akm = A_0$ – нульова гармоніка. Вона присутня у складі ряду не завжди. Якщо функція симетрична щодо осі часу, то нульової гармоніки немає.

Другий доданок – це перша або основна гармоніка ряду, задає основний період $T = 2\pi/\omega$.

Усі інші доданки називаються вищими гармоніками ряду. Період кожної з них кратний періоду основної гармоніки. Зробимо перетворення ряду, розкривши синус суми

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} (\sin k\omega t \cdot \cos\psi_k + \cos k\omega t \cdot \sin\psi_k) = \tag{6.2}$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (B_{km} \sin k\omega t + C_{km} \cos k\omega t).$$

де $B_{km} = A_{km} \cos\psi_k$; $C_{km} = A_{km} \sin\psi_k$; $A_{km} = \sqrt{(B_{km})^2 + (C_{km})^2}$;

$\psi_k = arctg \dfrac{C_{km}}{B_{km}}$.

Коефіцієнти ряду визначаються за такими формулами

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\omega t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t) d(\omega t),$$

$$B_{km} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t) \sin k\omega t \, d(\omega t), \tag{6.3}$$

$$C_{km} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t) \cos k\omega t \, d(\omega t).$$

Вирази для коефіцієнтів ряду дозволяють одержати розкладання у ряд будь-якої періодичної функції, однак для більшості таких функцій, які використовуються у теорії електричних кіл. Ці розкладання вже отримані й можуть бути взяті у відпові-

дній довідковій літературі.

Склад елементів ряду може бути спрощений, якщо вигляд вихідної функції має той або інший видгляд симетрії (рис. 6.2).

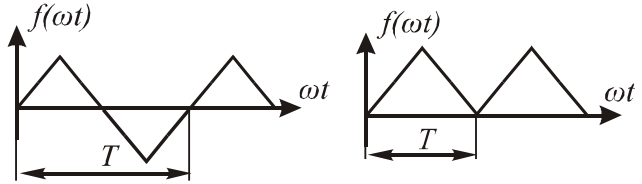


Рисунок 6.2 – Види симетрії періодичних функцій

1) $f(\omega t) = -f(\omega t+\pi)$ – функція симетрична щодо осі *OX*.

Розкладання у ряд такої функції не містить постійної складової та парних гармонік:

$$f(\omega t) = A_{1msin}(\omega t + \psi_1) + A_{3msin}(3\omega t + \psi_3) + A_{5msin}(5\omega t + \psi_5) + \ldots$$

2) $f(\omega t) = f(-\omega t)$ – функція симетрична щодо осі *OY*.

У цьому випадку ряд не містить синусних складових:

$$f(\omega t) = A_0 + A_{1mcos\omega t} + A_{2mcos}2\omega t + A_{3mcos}3\omega t + \ldots$$

3) Функція симетрична відносно початку координат:

$$f(\omega t) = (f((\omega t);$$

Така функція не містить постійної складової й косинусних складових:

$$f(\omega t) = A_{1msin\omega t} + A_{2msin}2\omega t + A_{3msin}3\omega t + \ldots$$

6.2 Амплітудне, середнє та діюче значення періодичних несинусоїдальних функцій

Ці поняття аналогічні тим, які були введені стосовно до синусоїдальних коливань, але у той самий час вони мають свою специфіку.

Амплітудне значення – це максимальне значення функції за період.

На рис. 6.3 максимальне значення функції $f(\omega t)$.

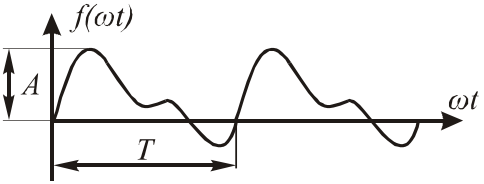


Рисунок 6.3 – Амплітудне значення несинусоїдальної функції

Середнє за модулем значення:

$$A_{cp.} = \frac{1}{T}\int_0^T |f(\omega t)|dt\,. \tag{6.4}$$

Діюче значення:

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(\omega t)dt}\,. \tag{6.5}$$

Останній з наведених параметрів ставиться до найбільш важливих параметрів несинусоїдальних періодичних функцій, оскільки саме ця величина виміряється приладами. Будемо вважати, що *f(ωt)* задана поруч, тоді

$$\mathrm{A}^2 = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}\left(\sum_{k=0}^{\infty} A_{km}\sin(k\omega t + \psi_k)\right)^2 \mathrm{dt} = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{A}^2{}_{\mathrm{km}}\sin^2(\mathrm{k}\omega\mathrm{t} + \psi_{\mathrm{k}})\mathrm{dt} +$$

$$+\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{T}\sum_{\substack{n=0\\k=0\\n\neq k}}^{\infty}\mathrm{A}_{\mathrm{km}}\sin(\mathrm{k}\omega\mathrm{t} + \psi_{\mathrm{k}})\mathrm{A}_{\mathrm{nm}}\sin(\mathrm{n}\omega\mathrm{t} + \psi_{\mathrm{n}})dt.$$

Доданки другого виду при інтегруванні за повний період звертаються в нуль через симетрію синусоїдальних функцій.

$$A^2 = \frac{1}{T}\int_0^T {A_0}^2 dt + \frac{1}{T}\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}{A_{km}}^2\left(\frac{1-\cos(2k\omega t + 2\psi_k)}{2}\right)dt\,;$$

$$A^2 = {A_0}^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{{A_{km}}^2}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}{A_k}^2\,,$$

де A_k – діюче значення кожної з гармонік.

Тоді

$$A = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} A^2{}_k} = \sqrt{A_0^2 + \frac{\sum_{k=1}^{\infty} A^2{}_{km}}{2}}. \qquad (6.6)$$

Аналогічно визначаються діючі значення несинусоїдальної напруги й будь-якої іншої функції, що змінюється за несинусоїдальним періодичним законом.

Діюче значення періодичної несинусоїдальної функції дорівнює кореню квадратному із суми квадратів діючих значень окремих його гармонік.

$$U = \sqrt{U_0{}^2 + U_1{}^2 + U_0{}^2 + \ldots} = \sqrt{U_0{}^2 + \frac{\sum_{k=1}^{\infty} U_{km}^2}{2}}.$$

6.3 Коефіцієнти, що характеризують форму несинусоїдальних періодичних функцій

Для оцінки несинусоїдальних періодичних функцій в електроенергетиці вводять коефіцієнт форми $K_ф$, коефіцієнт амплітуди K_a й коефіцієнт викривлення K_u.

Коефіцієнт форми визначається як відношення діючого значення до середнього за модулем значення

$$K_ф = \frac{A}{A_{ср}}. \qquad (6.7)$$

Для синусоїди $K_ф = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}} = 1{,}11$.

Коефіцієнт амплітуди дорівнює відношенню максимального значення до діючого значення

$$K_a = \frac{A_m}{A}. \qquad (6.8)$$

Для синусоїди $K_a = \sqrt{2}$.

Коефіцієнт викривлень визначається відношенням діючого значення першої гармоніки до діючого значення всієї кривої

$$K_u = \frac{A_1}{A}. \qquad (6.9)$$

Для синусоїди $K_u = 1$.

У електроніці для оцінки викривлень користуються коефіцієнтом гармонік, який визначається відношенням діючого значення вищих гармонік до діючого значення першої гармоніки

$$K_г = \frac{1}{A_1}\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} A_k{}^2}\ . \qquad (6.10)$$

Для синусоїди $K_г = 0$.

У електроенергетиці вводять поняття практично синусоїдальної кривої. Якщо діюче значення вищих гармонік у напрузі промислової мережі не перевищує *5%* від діючого значення основної частоти, то така напруга вважається практично синусоїдальним.

Прилади електромагнітної, електродинамічної та теплової систем реєструє діюче значення вимірюваної величини. Прилади магнітоелектричної системи реагують на постійну складову, а з випрямлячем – середнє за модулем значенням.

При коефіцієнті форми $K_ф$, що сильно відрізняється від 1.11, погрішність приладів випрямної системи стає значною.

6.4 Потужність періодичних несинусоїдальних струмів

Для визначення активної потужності, виділеної на активних елементах, скористаємося формулою миттєвої потужності *p = iu*, де *i* і *u* задані поруч Фур'є.

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} U_{km}\sin(k\omega t + \varphi_{uk}) \cdot I_{km}\sin(k\omega t + \varphi_{ik})\,dt\ .$$

Скористаємося відомою тригонометричною тотожністю:

$$\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right] = \sin\alpha\sin\beta\ .$$

Тоді будемо мати

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U_{km}I_{km}}{2}\left[\cos(\varphi_{uk} - \varphi_{ik}) - \cos(2k\omega t + \varphi_{uk} + \varphi_{ik})\right]dt\ ;$$

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U_{km}I_{km}}{2}\cos(\varphi_{uk} - \varphi_{ik}) = \sum U_k I_k \cos\varphi_k = \sum_{k=0}^{\infty} P_k\ .$$

У результаті одержимо

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_2 I_2 \cos\varphi_2 + \ldots . \quad (6.11)$$

Аналогічно визначається реактивна потужність:

$$Q = U_1 I_1 \sin\varphi_1 + U_2 I_2 \sin\varphi_2 + \ldots . \quad (6.12)$$

Повна потужність визначається за формулою

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} .$$

Лише у тому випадку, якщо спектри струму та напруги збігаються. При розбіжності спектрів цих функцій

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2 + T^2} , \quad (6.13)$$

де T – потужність викривлення, обумовлена розбіжністю спектрів струму й напруги.

Для кіл з несинусоїдальними джерелами аналогічно синусоїдальним колам уводять поняття коефіцієнта потужності

$$\chi = P / S = \cos\vartheta , \quad (6.14)$$

де ϑ – деякий фіктивний кут.

6.5 Огинаючі несинусоїдальних періодичних функцій

На відміну від періодичних функцій, розглянутих вище, існують несинусоїдальні криві з періодичними або майже періодичними, що огинають. Для них характерно те, що вони мають кінцеве число доданків у розкладанні. Причому частоти, що огинають і складових ряду непорівнянні. Класичним прикладом таких функцій є биття та модуляція.

6.5.1 Биття

Функція биття являє собою суму двох синусоїдальних коливань, що мають однакові амплітуди й близькі, але не рівні частоти.

$f_1 = A m \sin\omega_1 t$, $f_2 = A m \sin\omega_2 t$, причому $\omega_1 > \omega_2$, $\omega_1 \approx \omega_2$.

Сума цих функцій

$$f = A_m(\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t) = 2A_m \cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \sin\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t .$$

Позначимо

$$\Omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2};\ \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Тоді

$$f = 2A_m \cos(\Omega t) \cdot \sin(\omega t);\ \omega >> \Omega.$$

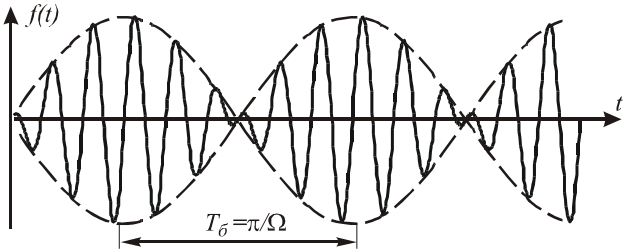


Рисунок 6.4 – Графік функції биття

З рис. 6.4 слідує, що частота огинаючої чи частота биття $f_б = \Omega/\pi$ дорівнює числу максимумів огинаючою кривої в одиницю часу.

Період биттів $T_б$ не дорівнює періоду кривою $f(t)$:

$$f(t + T_б) = 2A_m \cos(\Omega t + \pi)\sin(\omega t + \pi\frac{\omega}{\Omega});$$

Якщо відношення $\omega / \Omega = 2k - 1$ складає ціле непарне число, то період биттів збігається з періодом кривої $f(t)$.

У випадку, коли період биттів і період обвідної несинусоїдальні, тобто їх відношення не дорівнює цілому числу результуючих коливань є квазіперіодичними.

6.5.2 Модуляція

Синусоїдальні коливання характеризуються трьома основними параметрами: амплітудою, частотою та початковою фазою. У випадку, коли один із цих параметрів повільно міняється у часі за деяким періодичним законом, то говорять про амплітудну, частотну або фазову модуляції. Розглянемо дане явище на прикладі амплітудної модуляції, яка може бути подана функцією вигляду:

$$f(t) = A_m(t)\sin\omega_o t,$$

де $A_m(t)$ – змінюється за деяким періодичним законом.

$f(t) = A_{om}(1 - m\cos(\Omega t))\sin\omega_o t;\ \omega_o >> \Omega,$

ω_o – носійна частота;

Ω – модулююча частота;

$m < 1$ – коефіцієнт (глибина) модуляції. Він показує відхилення амплітуди модулюючого коливання від деякого середнього значення

$$f(t) = A_{om}\sin\omega_o t + A_{om}m\cos(\Omega t)\sin(\omega_o t),$$

$$f(t) = A_{om}\sin\omega_o t + 0{,}5A_{om}m\cdot[\sin((\omega_o - \Omega)t) + \sin((\omega_o+\Omega)t)].$$

Отриманий результат показує, що модулювання за амплітудою коливання є сумою трьох коливальних складових. Одне відбувається з носійною частотою ω_o. Два інших – з бічними частотами $(\omega_o - \Omega)$ і $(\omega_o + \Omega)$. Сказане дозволяє побудувати результуючу функцію (рис. 6.5).

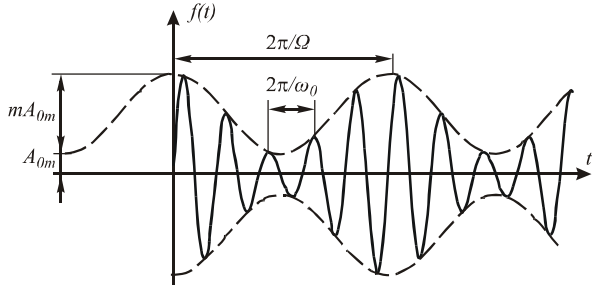


Рисунок 6.5 – Графік модульованих за амплітудою коливань

Цей вид модуляції далеко не кращий, оскільки він найбільшою мірою підданий перешкодам. Для підвищення завадостійкості використовуються комбіновані методи модуляції.

6.6 Резонансні явища у колах з несинусоїдальними джерелами

Розглядаючи однофазні синусоїдальні кола, ми познайомилися з явищем резонансу. Зазначені явища мають місце у колах із несинусоїдальними джерелами, однак у цьому випадку вони мають певну специфіку, пов'язану з тією обставиною, що резонанс може виникнути як на основній, так і на вищих гармоніках.

Для послідовного контура у колах з несинусоїдальним джерелом умова резонансу буде задана співвідношенням:

$$k\omega L = \frac{1}{k\omega C},$$

де ω - частота основної гармоніки; k – номер гармоніки.

Запишемо вираз струму у k-ій гілці

$$I_k = \frac{E_k}{\sqrt{R^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}}.$$

Побудуємо графік залежності струму у k-ій гілці від індуктивності (рис. 6.6).

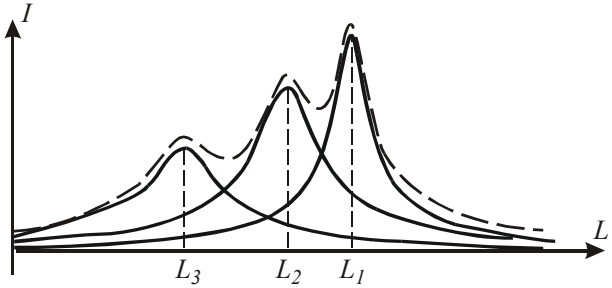


Рисунок 6.6 – Залежність струму від індуктивності

6.7 Методика розрахунків кіл з несинусоїдальними джерелами

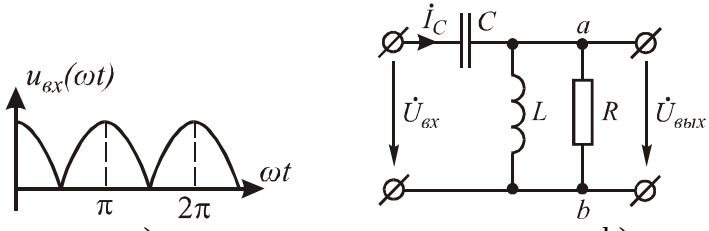
1. Задану несинусоїдальну функцію, що живить коло, розкладають у ряд Фур'є та обмежуються при цьому трьома (чотирма членами ряду, включаючи постійну складову, якщо вони є).

2. Кожним із відомих методів розрахунків складних електричних кіл проводяться розрахунки струмів і напруг заданого кола. При цьому використовується комплексний метод розрахунків. Ця процедура виконується для всіх гармонік ряду, включаючи й постійну складову, яка еквівалентна колу на постійному струмі.

Комплексний розв'язок, отриманий на кожній з гармонік складати не можна, з метою одержання узагальненого розв'язку завдання. Цю процедуру заважає виконати та обставина, що відповідні до отриманих розв'язків вектори будуть обертатися з різними кутовими частотами, тому отримані комплексні розв'язки

повинні бути переведені в реальні функції часу та лише потім додатися, ґрунтуючись на принципі накладення.

Сказане проілюструємо прикладом для кола та сигналу, що зображені на рис. 6.7.



a) b)

Рисунок 6.7 – Форма вхідної напруги (а) і схема досліджуваного кола (b)

Коло (рис. 6.7, а) має такі параметри: $U_{вх} = 100В$ – діюче значення (для першої гармоніки), $XL = 25$ *Ом,* $XC = 100$ *Ом,* $R = 50$ *Ом.*

Визначити діючу напругу на виході, обмежуючись першими трьома членами ряду, на які можна розкласти функцію $u_{вх}(\omega t)$.

Використовуючи відоме розкладання, одержимо:

$$u_{вх}(\omega t) = \frac{4U_m}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cos 2\omega t - \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t + \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\omega t\right);$$

$$u_{вх}(\omega t) = \frac{4\cdot 100\sqrt{2}}{\pi}\left(0{,}5 + 0{,}33\cos 2\omega t - 0{,}07\cos 4\omega t\right);$$

$$u_{вх}(\omega t) = 90 + 60\cos 2\omega t - 12\cos 4\omega t;$$

Для визначення функції вихідної напруги складемо передавальну функцію вихідного кола, який зв'язує вхідна та вихідна напруги і є частотно-залежною:

$$Z_{вх} = \frac{1}{j\omega C} + \frac{j\omega L\cdot R}{j\omega L + R};\quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{вх}}{Z_{вх}};\quad Z_{ab} = \frac{j\omega L\cdot R}{j\omega L + R};$$

$$\dot{I}_C \cdot Z_{ab} = \dot{U}_{вих};\quad \frac{\dot{U}_{вих}}{\dot{U}_{вх}} = \frac{Z_{ab}}{Z_{вх}};\quad N(j\omega) = \frac{Z_{ab}}{Z_{вх}};$$

$$N(j\omega) = \frac{\dfrac{R \cdot jk\omega L}{jk\omega L + R}}{\dfrac{1}{j\omega C} + \dfrac{jk\omega L \cdot R}{jk\omega L + R}}.$$

При $k = 0$ $N^{(0)} = 0$. При $k = 2$ $N^{(2)} = j = 1 \cdot e^{j90^\circ}$.

Отриманий результат показує, що амплітуда вихідного сигналу у точності дорівнює амплітуді вхідного. Фаза вихідної напруги на цій самий гармоніці випереджає фазу вхідної напруги на 90°.

При $k = 4$ $N^{(4)} = 1{,}13 \cdot e^{j33{,}7^\circ}$.

Використовуючи отриманий результат, трансформуємо вхідний ряд напруги та одержимо відповідний ряд вихідної напруги у реальному часі.

$$u_{вих}(\omega t) = 60 \cdot \cos(2\omega t + 90^\circ) - 13{,}56 \cdot \cos(4\omega t + 33{,}7^\circ);$$

$$U_{вих} = \sqrt{\left(\frac{60}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{13{,}56}{\sqrt{2}}\right)^2} = 43{,}5\text{В}.$$

У випадку, якщо на виході з'явилася б постійна складова, то її також необхідно врахувати, шляхом внесення під знак кореня квадрата її величини (ділити на $\sqrt{2}$ не можна).

РОЗІЛ 7 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ У ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

7.1 Поняття про перехідні процеси

Під ***перехідними процесами*** розуміють процеси переходу від одного режиму роботи електричного кола до іншого. Вони виникають при розмиканні та замиканні вимикачів, тобто при різних комутаціях кола.

Комутацією називається швидка зміна усталеного (стаціонарного) електричного режиму кола.

На рис. 7.1 а показане вмикання рубильника, а на рис. 7.1 б показане вимикання.

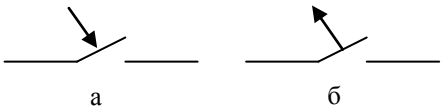


Рисунок 7.1 – Умовне зображення комутації

Звичайно до та після комутації кола спостерігається режим, що встановився, який може бути таких видів: відсутності струму, постійний струм або синусоїдальний струм.

Тривалість перехідних режимів звичайно становить соті, а іноді мільйонні долі секунди. Однак вивчення їх важливе, оскільки вони часом приводять до перенапруг на ділянках кола, деформаціям за формою та амплітудою сигналів при проходженні через каскади кола і так далі.

Надалі будемо вважати, що комутації відбуваються миттєво. Значення струмів і напруг до комутації будемо позначати $i(0–)$ та $u(0–)$, а після комутації відповідно $i(0+)$ та $u(0+)$.

Рівняння напруг електричного кола з реактивними елементами L та C містять похідні струмів або напруг і є диференціальними рівняннями (ДР). Так, при наявності у колі резистора та індуктивності (рис. 7.2) рівняння напруг має вигляд

$$i_L R + L\frac{di_L}{dt} = E\,. \qquad (7.1)$$

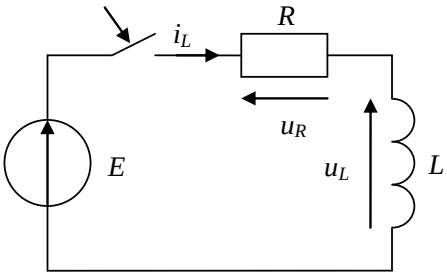


Рисунок 7.2

У розгалуженому електричному колі рівняння напруг, записаних за другим законом Кірхгофа, утворюють систему диференціальних рівнянь (СДР). Розв'язавши ДР, знайдемо струми $i(t)$ і напруги $u(t)$ як функції часу, і тим самим установимо, як змінюються вони під час перехідного процесу. Для розв'язку диференціальних рівнянь існує кілька методів: класичний, операторний, частотний та інші.

При розрахунках перехідних процесів використовують струм та напругу на індуктивності

$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt},\ u_C(t) = \frac{1}{C}\int i_C(t)dt\,, \qquad (7.2)$$

а також струм та напругу на ємності

$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt},\ i_L(t) = \frac{1}{L}\int u_L(t)dt\,. \qquad (7.3)$$

7.2 Закони комутації

Після закінчення перехідного процесу встановлюється новий режим, що називається усталеним, який визначається тільки зовнішніми джерелами енергії. При відключенні зовнішніх джерел енергії перехідний процес може виникати за рахунок енергії електромагнітного поля, накопиченої до початку перехідного режиму в індуктивних і ємнісних елементах кола.

Закони комутації є наслідком із законів збереження енергії для магнітного та електричного полів. Зміни енергії магнітного та електричного полів не можуть відбуватися миттєво, і, отже, не можуть миттєво проходити процеси у момент комутації. Насправді стрибкоподібна (миттєва) зміна енергії в індуктивному і ємнісному елементі приводить до необхідності мати нескінченно більші потужності p = dw/dt, що практично неможливо, тому що у реальних електричних колах нескінченно великої потужності не існує.

Таким чином, перехідні процеси не можуть проходити миттєво, тому що неможливо в принципі миттєво змінювати енергію, накопичену в електромагнітному полі кола. Теоретично перехідні процеси закінчуються за час $t\to\infty$. Практично ж перехідні процеси є швидкоплинними, і їхня тривалість звичайно становить долі секунд. Оскільки енергія магнітного $W_{МП}$ та електричного полів $W_{ЕП}$ описується виразами

$$W_{ЕП} = \frac{\mathrm{Li}^2}{2},\ W_{МП} = \frac{\mathrm{Cu}^2}{2}, \qquad (7.4)$$

то струм в індуктивності та напруга на ємності не можуть змінюватися миттєво. На цьому засновані закони комутації.

Перший закон комутації говорить про те, що струм через індуктивність не може змінитися стрибком або інакше, струм через індуктивність до комутації дорівнює струму через індуктивність після комутації

$$i_L(0-) = i_L(0+). \qquad (7.5)$$

Довести це можна, розглядаючи рівняння (1.1). Якби струм міг змінитися стрибком, то похідна $\frac{di}{dt}\to\infty$, і ліва частина рівняння не буде дорівнювати правій, оскільки енергія джерела напруги E не дорівнює нескінченності.

Іноді доводиться використовувати більш загальний закон: сума потокозчеплень до комутації дорівнює сумі потокозчеплень після комутації

$$\sum\psi(0-) = \sum\psi(0+),\ \text{де}\ \sum\psi = \sum L_k i. \qquad (7.6)$$

Другий закон комутації говорить про те, що напруга на ємності не може змінитися стрибком або напруга на ємності до комутації дорівнює напрузі на ємності після комутації

$$u_C(0–) = u_C(0+). \qquad (7.7)$$

Доводиться це аналогічно попередньому. Якби була можливість зміни напруги на конденсаторі стрибком, то похідна $\frac{du_c}{dt}$ прямувала б до нескінченності та у рівнянні кола, що містить опір і конденсатор (рис. 7.3),

$$Ri_C + u_C = E \text{ або } CR\frac{du_C}{dt} + u_C = E \text{, оскільки } i_C = C\frac{du_C}{dt}$$

ліва частина не була б рівна правій, оскільки енергія джерела напруги Е не дорівнює нескінченності.

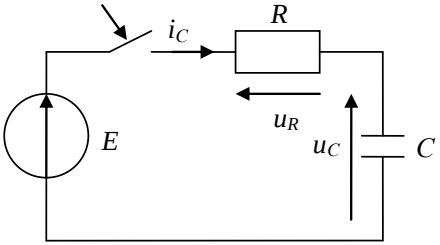


Рисунок 7.3

Іноді доводиться використовувати більш загальний закон збереження заряду – заряд у колі до комутації дорівнює заряду у колі після комутації

$$Q(0–) = Q(0+) \text{ або } \sum_k C_k u_{C\,k}(0–) = \sum_k C_k u_{Ck}(0+). \qquad (7.8)$$

Наслідки із законів комутації

1. У момент комутації ємність при наявності початкового заряду еквівалентна джерелу напруги величиною $E = U_C(0)$, а без нього – замиканню кола у місті її включення.

2. У момент комутації індуктивність із струмом $i_L(0)$ еквівалентна джерелу струму величиною $i_L(0)$, а без нього – розриву кола.

7.3 Початкові умови

Значення струмів через індуктивності $i_L(0+)$ та напруги на конденсаторах $u_C(0+)$ у момент часу t=0+ (тобто відразу після комутації) називають незалежними початковими умовами. Вони залишаються такими ж, якими вони були до комутації.

Початкові значення струмів та напруг на інших елементах при t=0+ називають залежними початковими умовами. Для їхнього знаходження використовують незалежні початкові умови та системи рівнянь, складені за першим та другим законами Кірхгофа.

7.4 Комутації при зміні струму стрибком

Існує ряд комутацій, що відносять до комутацій при зміні струму стрибком. Прикладом такої комутації є схема, зображена на рис. 7.4. До комутації струм у котушці індуктивності L2 дорівнює 0, а в котушці індуктивності L1 - не дорівнює 0.

У момент комутації (відключення ключа) струм у котушці індуктивності L1 змінюватися не повинен, а струм в L2 у цей самий час дорівнює нулю.

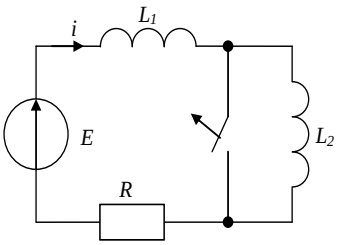


Рисунок 7.4

Тому на підставі 1-го закону Кірхгофа струм повинен замкнути через дугу (при різкій зміні струму напруга на котушці індуктивності L2 стане досить великою, у ключі відбудеться пробій, і буде горіти іскра). У реальній котушці струм також частково може замкнути через міжгілкову ємність.

Після згасання дуги струми в котушках урівнюються. У такій інтерпретації можна (умовно) вважати, що струми урівнюються миттєво. Для подальшого розрахунку перехідного процесу необхідно знати струм після комутації $i(0+)$. Це значення

можна одержати, якщо використати принцип безперервності сумарного потокозчеплення при комутації

$$\psi(0-) = \psi(0+).$$

Насправді потокозчеплення визначається за формулою

$$\psi(t) = Li(t).$$

У принцип безперервності сумарного потокозчеплення запишемо значення потокозчеплення. Після комутації значення індуктивності збільшується до виразу

$$L_1 + L_2.$$

Тоді запишемо

$$L_1 \cdot i(0-) = (L_1 + L_2) i(0+),$$

і остаточно одержуємо

$$i(0+) = \frac{L_1}{L_2 + L_1} i(0-) = i_{L1}(0+) = i_{L2}(0+).$$

Стрибкоподібна зміна струмів та відповідних їм потоків у L_1 та L_2 у момент комутації не призводить у даному випадку до наведення нескінченно великої сумарної ЕРС самоіндукції, оскільки сумарне потокозчеплення не терпить зміни стрибком. При нових значеннях струмів у L_1 та L_2 магнітна енергія, що запасена у котушках, буде менше енергії, що запасена у першій котушці до комутації. Частина енергії перетвориться у тепло іскри, а також випроміниться. Знайдений таким чином струм $i(0)$ у L_1 та L_2 може розглядатися як незалежна початкова умова для розрахунку перехідного процесу у всьому колі (рис. 1.4) після розриву дуги.

При комутаціях у колах з ємностями при відсутності опорів також можливі досить швидкі перерозподіли зарядів, що умовно розглядаються як миттєві. У цьому випадку застосовується принцип постійності сумарного заряду. Одержані при цьому значення зарядів та напруг на окремих ємностях використовуються при розрахунках наступного перехідного процесу як незалежні початкові умови.

Струми в індуктивностях і напруги на ємностях у момент комутації є незалежними початковими умовами. Перехідний процес іде від цих умов до сталого режиму.

7.5 Вигляд коренів диференціального рівняння

Корені диференціального рівняння у загальному випадку можуть бути дійсними, кратними або комплексно-спряженими.

1. Корені різні, дійсні та від'ємні ($\lambda_1 \neq \lambda_2$).

У цьому випадку вільна складова струму у індуктивності та напруги на ємності матиме вигляд

$$\begin{aligned} i_{L.B}(t) &= A_1 e^{\lambda_1 \cdot t} + A_2 e^{\lambda_2 \cdot t}, \\ u_{C.B}(t) &= B_1 e^{\lambda_1 \cdot t} + B_2 e^{\lambda_2 \cdot t}. \end{aligned} \qquad (7.7)$$

2. Корені рівняння однакові та дійсні ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$).

У цьому випадку вільна складова струму у індуктивності та напруги на ємності матиме вигляд

$$\begin{aligned} i_{L.B}(t) &= A_1 e^{\lambda \cdot t} + tA_2 e^{\lambda \cdot t}, \\ u_{C.B}(t) &= B_1 e^{\lambda \cdot t} + tB_2 e^{\lambda \cdot t}. \end{aligned} \qquad (7.8)$$

3. Корені комплексно-спряжені ($\lambda_1 = -\alpha + j\omega_0$ і $\lambda_2 = -\alpha - j\omega_0$).

У цьому випадку вільна складова струму у індуктивності та напруги на ємності матиме вигляд

$$\begin{aligned} i_{L.B}(t) &= Ae^{-\alpha \cdot t} \sin(\omega_0 t + \varphi), \\ u_{C.B}(t) &= Be^{-\alpha \cdot t} \sin(\omega_0 t + \gamma), \end{aligned} \qquad (7.9)$$

де A, B і φ, γ - сталі коефіцієнти;

або

$$\begin{aligned} i_{L.B}(t) &= e^{-\alpha \cdot t}[A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t)], \\ u_{C.B}(t) &= e^{-\alpha \cdot t}[B_1 \cos(\omega_0 t) + B_2 \sin(\omega_0 t)], \end{aligned} \qquad (7.10)$$

де A_1, A_2, B_1, B_2 – сталі інтегрування або постійні коефіцієнти.

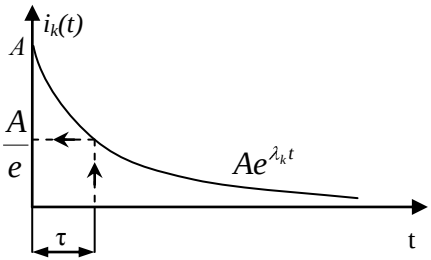
7.6 Характеристики перехідного процесу

Значення кореня λ визначається структурою кола та параметрами елементів, а стала інтегрування А залежить ще від збуджуючих сил і від моменту комутації.

За час

$$t = \tau = \frac{1}{|\lambda|} \qquad (7.11)$$

вільна складова струму чи напруги зменшується в e раз (рис. 7.5).



Дійсно

$$\frac{A_k e^{\lambda_k (t+\tau)}}{A_k e^{\lambda_k t}} = e^{\lambda_k \tau} = e^{\lambda_k \frac{1}{|\lambda_k|}} =$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e} \cong \frac{1}{2.718} \cong 0.368$$

.

Рисунок 7.5

Чим більша стала часу кола, тим повільніше змінюються електричні змінні під час перехідного процесу. Хоча теоретично перехідний процес триває нескінчено довго, на практиці вважають, що вільною складовою можна нехтувати через час $t = (3-5)\tau$. За цей час початкове значення вільної складової зменшується відповідно в $(e^3 = 20) - (e^5 = 148)$ разів і досягає значень, співвимірних зі значеннями електричних змінних, спричинених у колі атмосферними явищами, хімічними процесами та іншими факторами, які не враховуються при аналізі прийнятої моделі.

Для різних моментів часу струм у колі, що виражений у відсотках кінцевого значення становить

1) для $t = \tau$, $\frac{i}{I_K} \cdot 100\% = 63.2\%$;

2) для $t = 2\tau$, $\frac{i}{I_K} \cdot 100\% = 86.5\%$;

3) для $t = 3\tau$, $\frac{i}{I_K} \cdot 100\% = 95.0\%$;

4) для $t = 4\tau$, $\frac{i}{I_K} \cdot 100\% = 98.2\%$;

5) для $t = 5\tau$, $\frac{i}{I_K} \cdot 100\% = 99.3\%$.

Для інженерних розрахунків взяли, що струм перехідного процесу дорівнює

$$t = 3\tau . \qquad (7.12)$$

Звідси час перехідного процесу можна розрахувати за такою формулою

$$t_{pp} = 3\tau \approx \frac{3}{|\lambda|}, \qquad (7.13)$$

де λ – дійсна частина для комплексних коренів і найменший з коренів за модулем для від'ємних дійсних коренів.

Коефіцієнт загасання кола – величина обернена сталій часу кола

$$\alpha = \frac{1}{\tau}. \qquad (7.14)$$

Декремент загасання – величина, що характеризує швидкість загасання розглянутих коливань і дорівнює відношенню напруг у момент часу t та $t+T$

$$\Delta = \frac{U_1}{U_2} = \frac{U_1(t)}{U_1(t+T)} = \frac{e^{-\alpha \cdot t}}{e^{-\alpha \cdot (t+T)}} = e^{\alpha \cdot T} .. \qquad (7.15)$$

Декремент загасання є сталою величиною, що не залежить від часу, а залежить лише від параметрів кола *R, L, C*.

Часто швидкість загасання коливань характеризують натуральним логарифмом від декремента загасань

$$\delta = \ln(\Delta) = \ln(e^{\alpha \cdot T}) = \alpha \cdot T , \qquad (7.16)$$

α - коефіцієнт загасання, T - період коливань.

Величину δ називають *логарифмічним декрементом загасання*.

7.7 Класичний метод розрахунку перехідних процесів

7.7.1 Загальні положення

Відомо, що розв'язок ДР або загальний інтеграл лінійного диференціального рівняння дорівнює сумі власного розв'язку неоднорідного рівняння та загальний розв'язок однорідного ДР.

Власний розв'язок визначають для усталеного режиму, коли похідна стане дорівнювати нулю. Його характер залежить від характеру ЕРС. Якщо ЕРС синусоїдальна, то власний розв'язок буде мати аналогічний вигляд. Якщо ЕРС – постійна, то власний розв'язок буде мати вигляд константи. Тому власний розв'язок називають **вимушеною** складовою.

Загальний розв'язок однорідного ДР (коли права частина ДР дорівнює нулю) являє собою суму експонент. Якщо ДР першого порядку, то загальний розв'язок має вигляд Ae^{pt}, якщо ДР другого порядку, то його вигляд $A_1e^{pt}+A_2e^{pt}$ і так далі. Загальний розв'язок ДР називають **вільною** складовою. Стосовно до рівняння (1.1) повний струм під час перехідного режиму рівний

$$i(t) = i_{ВИМ} + i_B = \frac{E}{R} + Ae^{pt}. \qquad (7.17)$$

Для визначення вільних інтегрування A_1, A_2 і т. д. необхідно знати початкові умови, тобто значення шуканих величин при $t=0_+$ (відразу після комутації).

Стосовно до рівняння (1.1), якщо відоме значення струму $i(0_+)$, то з рівняння (1.7) при $t=0_+$

$$A = i(0+) - \frac{E}{R}, \text{ оскільки } e^{pt} = e^{p\cdot 0} = 1.$$

Для визначення p складають характеристичне рівняння. Відомо кілька способів його складання. Переважно використовується для цих цілей вираз для вхідного опору кола на змінному струмі $Z(j\omega)$, у якому заміняють $j\omega$ на p і прирівнюють $Z(p)$ нулю. Розв'язуючи це рівняння $Z(p)=0$, знаходять його корені p_1, p_2 і т. д.

Відносно до рівняння (1.1)

$$Z(j\omega)=R+j\omega L,\ Z(p)=R+pL,\ Z(p)=0,\quad p=-\frac{R}{L}\ .$$

7.7.2 Коротке замикання RL-кола

Щоб визначити струм i_L під час перехідного процесу, складемо рівняння кола (рис. 7.6), що вийшов після комутації:

$$i_L R_k + L\frac{di_L}{dt} = 0, \qquad (7.18)$$

і розв'яжемо його класичним методом.

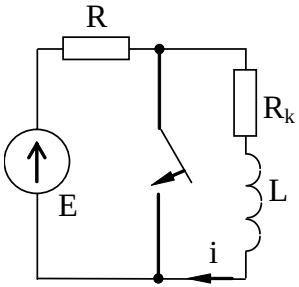


Рисунок 7.6

Для цього спочатку визначимо початкові умови $i_L(0+)$, які у цьому випадку є незалежними та можуть бути визначені за схемою, що була до комутації в усталеному режимі

$$i(0-)=\frac{E}{R+R_k},\quad i_L(0+)=i(0-)=\frac{E}{R+R_k}.$$

Після цього знаходимо вимушену складову струму за рівнянням (7.18) (в усталеному режимі, коли $\frac{di}{dt}=0$), похідна тоді з рівняння (7.18) $i_{ВИМ}R_k=0$ чи $i_{ВИМ}=0$. Розв'язок рівняння (7.18) відповідно до класичного методу має вигляд

$$i(t)=i_{ВИМ}+i_B=0+Ae^{pt}.$$

Характеристичне рівняння складемо, використовуючи метод вхідного опору:

$$Z(p)=0=R+pL.$$

Корень характеристичного рівняння $p=-\frac{R}{L}$.

Довільну інтегрування знайдемо, використовуючи початкові умови. При $t=0_+$

$$i(0_+) = \frac{E}{R+R_k} = i_{ВИМ}(0_+) + i_B(0_+) = 0 + Ae^{\circ}, \quad A = \frac{E}{R+R_k}.$$

Таким чином, рівняння для перехідного струму має вигляд

$$i(t) = \frac{E}{R+R_k} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

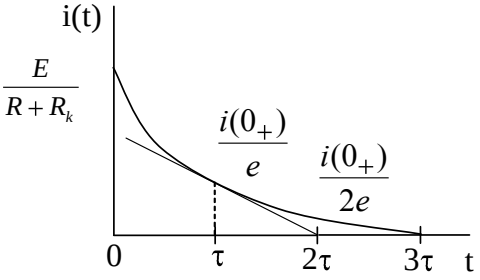


Рисунок 7.7

На рис. 1.7 наведений графік перехідного процесу у розглянутому колі. Отримана крива називається **експонентою**. Вона має ряд властивостей, які можуть бути використані для побудови графіка.

Величина $\tau = \frac{L}{R}$, яка називається **постійною часу**, є важливою характеристикою експоненти. За час, який дорівнює τ, експонентна функція зменшується в e=2,73 раз. Це використовується для графічної побудови. Відклавши на осі абсцис відрізки, які дорівнюють $\tau, 2\tau, 3\tau,$ над ними по осі ординат слід відкласти значення струму, зменшені спочатку в e раз, потім отриману ординату знову зменшити в e раз і т.д. За час, який дорівнює 4τ перехідний процес практично завершиться.

Іншою важливою властивістю експоненти є те, що піддотичної до неї в будь-якій точці експоненти дорівнює постійній часу τ.

7.7.3 Ввімкнення RL-кола під постійну напругу

Диференціальне рівняння кола (рис. 7.8) після комутації має вигляд

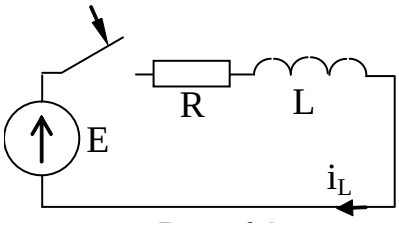


Рисунок 7.8

$$Ri_L + L\frac{di_L}{dt} = E\,.$$

Струм до комутації був рівний 0, і за першим законом комутації він залишиться незмінним відразу після комутації, тобто $i_L(0+) = i_L(0-) = 0$.

Розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$i(t) = i_{ВИМ} + i_B = \frac{E}{R} + Ae^{pt}, \qquad (7.19)$$

де $i_{ВИМ} = \frac{E}{R}$ – такий струм установиться після завершення перехідного процесу; p – корінь характеристичного рівняння $Z(p) = 0 = R + pL$, тобто $p = \frac{R}{L}$.

Для визначення довільної інтегрування використовуємо початкові умови. При $t=0_+$ $i(0_+)=0$ і у рівнянні (7.19) $i(0) = 0 = \frac{E}{R} + Ae^0$, звідки $A = -\frac{E}{R}$. Таким чином,

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}).$$

Для побудови графіка перехідного струму на рис. 7.9 будуємо спочатку графік вимушеної складової, потім – графік вільної складової струму, а потім їх додамо. Напругу на індуктивному елементі знайдемо, диференціюючи рівняння струму

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = Ee^{-\frac{R}{L}t}.$$

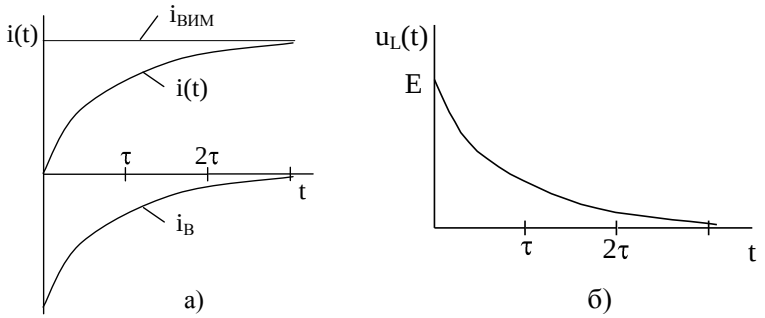


Рисунок 1.9

7.7.3 Розрив RL-кола

Диференціальне рівняння кола (рис. 7.10), що вийшло після комутації, має такий вигляд

$$iR + L\frac{di}{dt} + iR_v = 0. \qquad (7.20)$$

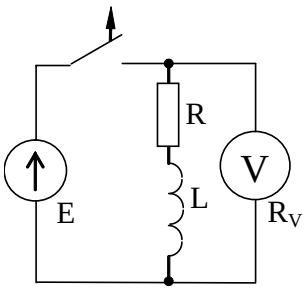


Рисунок 7.10

Для знаходження початкових умов врахуємо, що струм через індуктивність до комутації був рівний $i(0_-) = \frac{E}{R}$ і за законом комутації він залишиться таким самим відразу після комутації, тобто $i(0_+) = i(0_-) = \frac{E}{R}$.

Розв'язок рівняння (7.10) має вигляд $i(t) = i_{ВИМ} + i_B = 0 + Ae^{pt}$, де $i_{ВИМ} = 0, \quad p = -\frac{R + R_v}{L}$.

Довільну інтегрування знайдемо, використовуючи початкові умови. При $t = 0_+$, $i(0) = \frac{E}{R} = i_{ВИМ}(0_+) + i_B(0_+) = 0 + Ae^0$, звідки $A = \frac{E}{R}$. Отже, $i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{R+R_v}{L}t}$.

Напруга на затисках вольтметра, що має звичайно в багато разів більший опір, ніж опір *RL*-кола, різко зростає у перший момент часу

$$u_{R_v}(t) = i(t)R_v = \frac{E}{R} R_v e^{-\frac{R+R_v}{L}t}, \qquad (7.21)$$

тобто при $t=0_+$ до вольтметра буде прикладена напруга у $\frac{R_v}{R}$ раз більше, ніж напруга джерела *E,* і він може вийти з ладу. Ця сама напруга буде прикладена до обвитки, де може бути пробій ізоляції. Ця ж напруга буде прикладена до ключа, і там виникнуть пробій повітряного проміжку та іскра, а при великій індуктивності буде горіти дуга доти, поки запасена у магнітнім полі котушки індуктивності магнітна енергія не перетвориться в тепло на опорі *R* і в дузі.

Щоб виключити негативні наслідки при розриві кола, що містить індуктивність, паралельно *RL*-колу вмикають діод так, щоб при замкненому ключі струм через нього не проходив (включити зустрічно), але при розмиканні ключа струм ланцюги *RL*-кола міг замкнути через діод.

7.7.4 Включення RC-кола під постійну напругу

Рівняння напруг для кола (рис. 7.11), що вийшло після комутації мають вигляд $iR + U_C = E$.

Оскільки

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_C}{dt}, \text{ то } RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E. \qquad (7.22)$$

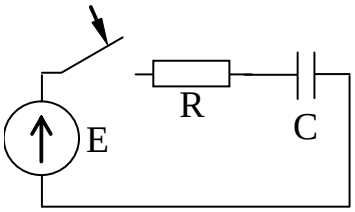


Рисунок 7.11

Початкові умови в колі нульові, тобто $u_C(0+) = u_C(0-) = 0$.

Розв'язок диференціального рівняння (1.11) має вигляд

$$u_C(t) = u_{C.ВИМ} + u_{C.В}(0-) = E + e^{pt},$$

де $u_{C.ВИМ} = \mathrm{E}$ – вимушена складова, тобто напруга на конденсаторі після завершення перехідного процесу. Характеристичне рівняння одержимо методом вхідного опору $Z(p) = 0 = R + \frac{1}{pC}$.

Звідки $p = -\frac{1}{RC}$.

Довільну інтегрування знайдемо, використовуючи початкові умови. При $t=0_+$ $u_C(0+) = 0 = u_{C.В\,И\,М}(0+) + u_{C.В}(0+) = Ae^0$. Звідки $A=-E$.

Отже,

$$u_C(t) = E - Ee^{-\frac{t}{RC}} = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}).$$

Перехідний струм

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt} = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Графіки перехідного струму та напруги на конденсаторі подані на рис. 7.12.

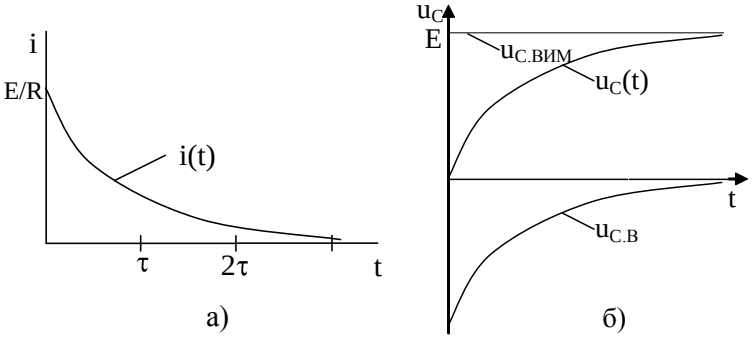


Рисунок 7.12

7.7.5 Включення RC-кола під змінну напругу

Диференціальне рівняння та початкові умови кола аналогічні рівнянню (7.11)

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U_m\sin(\omega t+\psi),\quad u_C(0_+)=u_C(0_-)=0.$$

Аналогічно попередньому випадку визначається та корень характеристичного рівняння $Z(p)=0;\quad R+\frac{1}{pC}=0;\quad p=-\frac{1}{RC}$.

Вимушена складова напруги на конденсаторі $u_{C.ВИМ}$, тобто та напруга, яка встановиться після завершення перехідного процесу, розраховується спочатку в комплексній формі

$$\dot{U}_{C\,m.ВИМ}=\frac{\dot{U}_m(-jx_C)}{\underline{Z}}=\frac{U_m e^{j\psi}\frac{1}{\omega C}e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}e^{-j\varphi}}=\frac{U_m e^{j(\psi-\varphi-\frac{\pi}{2})}}{\sqrt{(\omega CR)^2+1}},$$ де

$$\underline{Z}=R-j\frac{1}{\omega C}=\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}e^{j\varphi},\quad tg\varphi=\frac{-\frac{1}{\omega C}}{R},$$

а потім записується його миттєве значення

$$u_{Cnn} = \frac{U_m}{\sqrt{(\omega CR)^2 + 1}} \sin(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}) = U_{Cm} \sin(\omega t + \theta),$$

де $\theta = \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}$.

Вільна складова напруги на конденсаторі має такий вигляд:

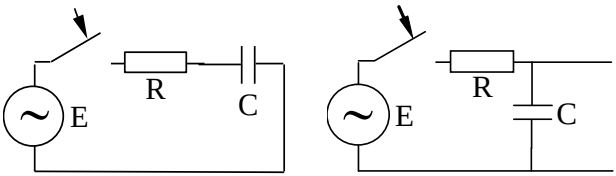
$$u_{C.B} = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{t}{RC}}.$$

Довільна інтегрування визначається при використанні початкових умов. При $t=0_+$

$$u_C(0+) = 0 = u_{C.BИМ}(0+) + u_{C.B}(0+) = u_C m \sin\theta + Ae^0.$$

Звідси $A = -u_C m \sin\theta$.

Таким чином, перехідна напруга на конденсаторі має вигляд (рис. 7.13, а): $u_C(t) = U_{Cm} \sin(\omega t + \theta) - U_{Cm} \sin\theta \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$.



а) б)

Рисунок 7.13

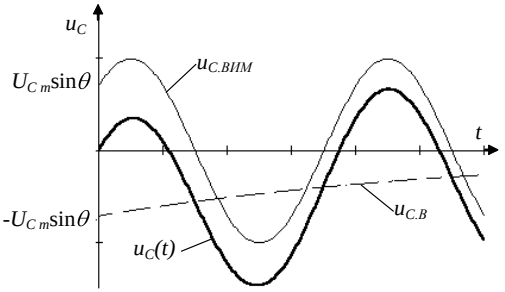


Рисунок 7.14

На рис. 7.14 видно, що напруга на конденсаторі $u_C(t)$ під час перехідного режиму може перевищити амплітуду ДР напруги на конденсаторі в усталеному режимі *Ucm*, але не більше ніж в 2 рази. Найбільше перевищення може бути у випадку, коли кут $\theta = \psi - \varphi - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ або коли початкова фаза напруги мережі ψ (обумовлена моментом включення рубильника) дорівнює куту зрушення фаз φ між напругою й струмом при режимі, що встановився, тобто $\psi = \varphi$. Можливий також випадок, коли кут $\theta = \psi - \varphi - \frac{\pi}{2} = 0$, тоді вільна складова напруги буде дорівнює нулю, і в колі відразу настане режим, що встановився.

Перехідний струм у колі дорівнює

$$i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} =$$

$$= \frac{U_m}{R}\left[\cos\varphi \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \sin\varphi \cdot \sin(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}) e^{-\frac{t}{RC}}\right].$$

Отриманий вираз для струму пояснює виникнення більших поштовхів струму при включенні ненавантаженої лінії електропередачі, що має схему заміщення, подану на рис. 7.13, б.

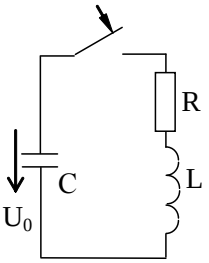
При включенні *RL*-кола під синусоїдальну напругу, рівняння та графік перехідного струму будуть мати вигляд, аналогічний рівнянню та графіку напруги на конденсаторі, розглянутому вище, тобто $i_L(t) = \frac{U_m}{Z}\sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{U_m}{Z}\sin(\psi - \varphi)e^{-\frac{t}{\tau}}$, де $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$, $\tau = \frac{L}{R}$. При цьому, як і в розглянутому вище випадку, струм *i(t)* під час перехідного режиму може перевищити амплітуду струму i_m, що встановився, після завершення перехідного режиму, але не більше ніж у 2 рази. Найбільше перевищення може бути, коли кут $\psi - \varphi = \frac{\pi}{2}$. Аналогічно, при $\psi - \varphi = 0$ вільна складова струму дорівнює нулю, і в колі відразу наступає, що встановився режим.

7.7.6 Розряд конденсатора у RLC-колі

Диференціальне рівняння кола (рис. 7.15) має вигляд

$$Ri + L\frac{di}{dt} + u_C = 0\,,\ \text{оскільки}\ i = C\frac{du_C}{dt},\ \text{то}$$

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0\,.$$



Початкові умови $u_C(0–) = u_C(0+) = U_0$, $i(0–) = i(0+) = 0$, $i(0_-) = i(0_+) = 0$.

Характеристичне рівняння складемо методом вхідного опору

$$Z(p) = 0, \quad R + pL + \frac{1}{pC} = 0.$$

Рисунок 7.15

Корені характеристичного рівняння

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

можуть бути трьох видів залежно від величини підкореневого виразу.

А. **Аперіодичний** розряд конденсатора відбувається при $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} > 0$, тобто при $R > R_{кр}$, де $R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ – критичний опір. При цьому корені p_1 та p_2 різні

$$u_C(t) = u_{C.ВИМ} + u_{C.В} = 0 + A_1e^{p_1t} + A_2e^{p_2t}\,,$$

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt} = C(p_1Ae^{p_1t} + p_2A_2e^{p_2t})\,.$$

Враховуючи початкові умови, знайдемо довільні інтегрування A_1 та A_2. При

$$t = 0_+ \quad u_C(0_+) = U_0 = A_1 + A_2,\ i(0_+) = 0 = p_1A_1 + p_2A_2\,.$$

Звідси знаходимо константи

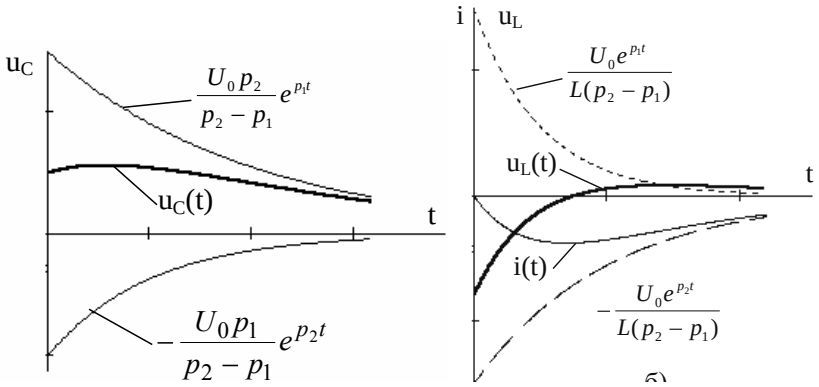
$$A_1 = \frac{p_2 U_0}{p_2 - p_1}, \quad A_2 = -\frac{p_1 U_0}{p_2 - p_1}.$$

Таким чином,

$$u_C(t) = \frac{U_0}{p_2 - p_1}(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}), \qquad i(t) = \frac{C p_1 p_2 U_0}{p_2 - p_1}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}),$$

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = \frac{U_0}{p_2 - p_1}(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}).$$

За цими рівняннями побудуємо графіки, що зображені на рис. 7.16



а) б)

Рисунок 7.16

Слід звернути увагу, що крива $u_L(t)$ перетинає вісь абсцис у точці, коли струм $i(t)$ досягає максимуму. При цьому $u_L(t) = L\dfrac{di(t)}{dt} = 0.$

Б. **Коливальний** розряд конденсатора відбувається при $\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 < \dfrac{1}{LC}$, тобто при $R < R_{кр} = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$. При цьому корені характеристичного рівняння – комплексно-спряжені

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = -\delta \pm j\omega\,, \text{ де}$$

$$\delta = \frac{R}{2L},\ \ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2},\ \ \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Перехідна напруга на конденсаторі

$$u_C(t) = u_{C.ВИМ} + u_{C.В} = 0 + A\sin(\omega t + \psi)\,),$$

а струм

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt} = AC\left[-\delta\sin(\omega t + \psi) + \cos(\omega t + \psi)\right].$$

Використовуючи початкові умови, визначимо A і ψ. При $t = 0_+$

$$\begin{cases} u_C(0+) = U_0 = A\sin\psi, \\ i(0+) = AC[-\delta\sin\psi + \omega\cos\psi] = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи спільно отриману систему рівнянь, знайдемо

$$\sin\psi = \frac{U_0}{A};\quad \cos\psi = \frac{\delta}{\omega}\frac{U_0}{A},$$

$$\sin^2\psi + \cos^2\psi = 1 = \frac{U_0^2}{A^2} + \frac{\delta^2}{\omega^2}\frac{U_0^2}{A^2},$$

$$A = U_0\frac{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}}{\omega} = U_0\frac{\omega_0}{\omega},\quad tg\psi = \frac{\omega}{\delta}.$$

Таким чином, $u_C(t) = U_0\dfrac{\omega_0}{\omega}e^{-\delta t}\sin(\omega t + \psi)$,

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt}(t) = CU_0e^{-\delta t}\frac{\omega_0}{\omega}\left[-\delta\sin(\omega t + \psi) + \omega\cos(\omega t + \psi)\right] =$$

$$= CU_0e^{-\delta t}\frac{\omega_0^2}{\omega}\sin(\omega t + \psi + \pi - \psi) = \frac{U_0}{\omega L}e^{-\delta t}\sin(\omega t + \pi),$$

де

$$\sqrt{\delta^2 + \omega^2} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}};\ \ tg\varphi = \frac{\omega}{-\delta} = tg(\pi - \psi),$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = \frac{\omega_0}{\omega}\left[-\delta\sin(\omega t + \pi) + \omega\cos(\omega t + \pi)\right] = \frac{U_0\omega_0}{\omega}e^{-\delta t}\sin(\omega t - \psi).$$

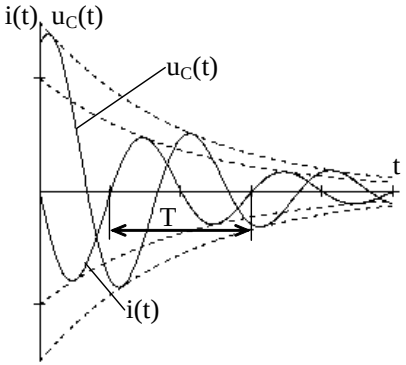


Рисунок 7.17

На рис. 7.17 подані графіки загасаючих коливань $i(t)$, $u_C(t)$, побудовані за отриманими вище рівняннями. Швидкість загасання таких коливань характеризують відношенням двох наступних амплітуд, яке носить спеціальна назва – **декремент** коливань

$$\frac{u_C(t)}{u_C(t+T)} = \frac{U_{Cm}e^{-\delta t}\sin(\omega t+\psi)}{U_{Cm}e^{-\delta(t+T)}\sin(\omega(t+T)+\psi} = e^{\delta T}.$$

Часто використовують і іншу величину, що називають **логарифмічним декрементом коливань**

$$\Delta = \ln\frac{u_C(t)}{u_C(t+T)} = \delta T$$

В. **Граничний випадок** аперіодичного розряду відбувається при $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$, тобто при $R = R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ та кратними коренями характеристичного рівняння. У цьому випадку визначають вільну складову напруги на конденсаторі за рівнянням

$$u_{C.B} = (A_1 + A_2 t)e^{pt}.$$

При цьому струм

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt} = C(A_2 + pA_1 + pA_2 t)e^{pt}.$$

При $t = 0_+$

$$uc(0) = U_0 = (A_1 + 0)e^0,\ i(0) = 0 = C(A_2 + pa_1 + 0)e^0.$$

Звідси

$A_1 = U_0$; $A_2 = -pa_1 = -pu_0$;

$$u_C(t) = (U_0 - pu_0 t)e^{pt} = U_0(1-pt)e^{pt};$$

$$i(t) = -Cp^2 U_0 te^{pt} = -\frac{U_0}{L}te^{pt};$$

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = -U_0(1+pt)e^{pt}.$$

Графіки цих величин за формою не відрізняються від наведених на рис. 7.17.

7.7.7 Включення RLC-кола під постійну напругу

Диференціальне рівняння кола має вигляд

$$Ri + L\frac{di}{dt} + u_C = E,\ i = C\frac{du_C}{dt},\ \text{тобто}$$

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E.$$

Початкові умови $u_C(0_+)=0,\ i(0_+)=0.$

Примушені складові $u_{C.ВИМ}=E,\ i_{ВИМ}=0.$

Характеристичне рівняння $Z(p)=0,\ R+pL+\frac{1}{pC}=0.$

Корені цього рівняння, як і у попередньому випадку, можуть бути трьох видів: різні, кратні та комплексно-спряжені. Відповідно до цього розглянемо три режими:

1. Аперіодичний процес відбувається при

$$R > R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

(коли корені різні). При цьому

$$u_C(t) = u_{C.ВИМ} + u_{C.В} = E + \frac{E}{p_1 - p_2}(p_2e^{p_1t} - p_1e^{p_2t}),$$

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt} = \frac{E}{L(p_1 - p_2)}(e^{p_1t} - e^{p_2t}),$$

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = \frac{E}{p_1 - p_2}(p_1e^{p_1t} - p_2e^{p_2t}).$$

На рис. 7.18, а подані графіки, побудовані за цими рівняннями.

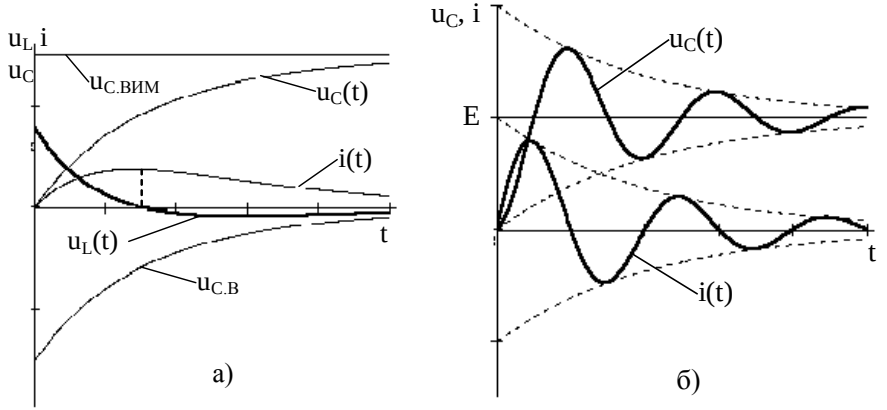


Рисунок 7.18

Б. Граничний випадок аперіодичного процесу (критичний) відбувається при $R = R_{кр} = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ (коли корені кратні).

При цьому

$$u_C(t) = E + (A_1 + A_2 t)e^{pt},$$

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt} = C(A_1 p + A_2 + A_2 pt)e^{pt}.$$

Використовуючи початкові умови $u_C(0_+)=0$, $i(0_+)=0$, визначаємо A_1 та A_2 аналогічно пункту 1.9

$$u_C(t) = E - (E - Ept)e^{pt},\ i(t) = CEp^2 te^{pt},$$

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = LCEp^2(1 + pt).$$

Графіки цих рівнянь аналогічні графікам, що зображені на рис. 7.18, а.

В. Загасаючі коливання відбуваються при

$R < R_{кр} = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ (коли корені комплексно-спряжені).

При цьому

$u_C(t) = u_{C.ВИМ} + u_{C.В} = E + Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \psi)$,

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt} = CA\left[-\delta\sin(\omega t+\psi)+\omega\cos(\omega t+\psi)\right].$$

Використовуючи початкові умови $u_C(0_+)=0$, $i(0_+)=0$, визначаємо A і ψ аналогічно пункту 1.9. При цьому

$$u_C(t) = E - \frac{E\omega_0}{\omega}e^{-\delta t}\sin(\omega t+\psi), \quad i(t) = \frac{E}{\omega L}e^{-\delta t}\sin\omega t,$$

$$u_L(t) = \frac{E\omega^0}{\omega}e^{-\delta t}\sin(\omega t-\psi).$$

На рис. 7.18, б подані графіки, побудовані за цими рівняннями. Слід звернути увагу на те, що напруга на конденсаторі під час перехідного процесу може перевищити напругу джерела, але не більше ніж у 2 рази.

7.7.8 Розрахунки перехідних процесів у розгалуженому колі

Розрахунки доцільно вести, дотримуючись певної послідовності:

1) задаємо додатні напрямки струмів у всіх гілках та визначаємо незалежні початкові умови $u_C(0)$, $i_L(0)$;

2) складаємо рівняння за законами Кірхгофа для кола, що вийшло після комутації;

3) знаходимо корені характеристичного рівняння, прирівнявши нулю вхідний опір будь-якої гілки схеми, тобто $Z(p)=0$;

4) визначаємо початкові умови шуканих струмів або напруг, $i(0_+)$, $u(0_+)$ та їх похідних (якщо характеристичне рівняння має другий порядок, тобто потрібні початкові умови струму та його похідної, якщо третій порядок, то буде потрібно ще і друга похідна струму), для цього використовуються складені у пункті 2 рівняння та певні у пункті 1 незалежні початкові умови (за необхідності рівняння можуть бути продиференційовані);

5) визначаємо вимушені складові $i_{ВИМ}$, $u_{ВИМ}$, виконавши розрахунки схеми в усталеному режимі відомими методами;

6) розраховуємо вільні складові шуканих перехідних величин (i_B, u_B), враховуючи характер коренів, отриманих у пункті

3; якщо корень один, то $i_B = Ae^{pt}$, $A = i(0_+) - i_{BИМ}(0_+)$; якщо два кореня, то для різних коренів

$$i_B = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad i'_B = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_1 t}. \qquad (7.23)$$

Приклад 7.1. Визначити перехідний струм через конденсатор (рис. 1.19), якщо E=120 *В*, R_1=R_3=50 *Ом*, R_2=10 *Ом*, L=2 *Гн*, C=150 *мкФ*.

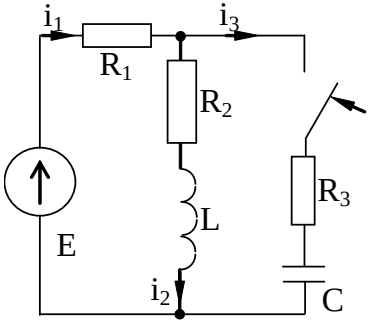


Рисунок 7.19

Задаємо додатні напрямки струмів та визначаємо незалежні початкові умови

$$i_2(0_+) = i_L(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_2} = 2A,$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0.$$

Розв'язання

Складаємо рівняння за законами Кірхгофа для кола, що вийшло після комутації

$$i_1 = i_2 + i_3, \qquad (1)$$

$$i_1 R_1 + i_2 R_2 + L\frac{di_2}{dt} = E, \qquad (2)$$

$$i_1 R_1 + i_3 R_3 + u_c = E, \qquad (3)$$

$$i_3 = C\frac{du_C}{dt}. \qquad (4)$$

Визначаємо корені характеристичного рівняння

$$Z(p) = 0, \quad R_3 + \frac{1}{pC} + \frac{R_1(R_2 + pL)}{R_1 + R_2 + pL} = 0,$$

$$p_{1,2} = -42{,}1 \pm j15{,}2 = -\delta \pm j\omega.$$

Розраховуємо початкові умови для струму $i_3(0_+)$ та його похідної $i'_3(0_+)$. Для цього спочатку підставимо у рівняння (1) та (3) значення $i_2(0_+)$=2 А та $u_C(0_+)$=0. Із системи рівнянь маємо

$i_1(0_+)=2+i_3(0_+)$, $50i_1(0_+)+50i_3(0_+)+0=120$.

Визначаємо $i_3(0_+)=0.2$ А, $i_1(0_+)=2.2$ А.

Потім з рівняння (2) знайдемо значення похідної струму $i'_2(0_+)$

$$i'_2(0_+)=\frac{di_2(0_+)}{dt}=\frac{1}{L}\left[E-i_1(0_+)R_1-i_2(0_+)R_2\right]=-5\ A/c.$$

Потім продиференціюємо рівняння (1) та (3)

$$i_1'(0_+)= i_2'(0_+)+ i_3'(0_+)=-5+ i_3'(0_+).$$

$$R_1\, i_1'(0_+)+ R_3\, i_3'(0_+)+u_{C'}(0_+)=0, \text{ але}$$

$$u_C'(0_+)=\frac{i_3(0_+)}{C}=\frac{0.2}{150\cdot 10^{-6}}=1333 \text{ В/с}.$$

Тоді $50i_1'(0_+)+50i_3'(0_+)+1333=0$.

Із цих рівнянь одержимо $i_3'(0_+)= -10,8$ А/с.

Знаходимо вимушену складову струму $i_{С.ВИМ.}$ В усталеному режимі струм через коденсатор дорівнює нулю, тому $i_{С.ВИМ}=0$.

Визначаємо вільну складову струму $i_{С.В}$ у формі загасаючих коливань $i_{C.B}=Ae^{-\delta t}\sin(\omega t+\psi)$, оскільки у пункті 3 минулого визначене комплексно-спряжені корені характеристичного рівняння. При цьому

$$i_C(t)=i_{C.ВИМ}+i_{C.B}=Ae^{-\delta t}\sin(\omega t+\psi),$$

$$i_3'(t)=A\left[-\delta\sin(\omega t+\psi)+\omega\cos(\omega t+\psi)\right].$$

При $t=0_+$

$$i_3(0_+)=0.2=A\sin\psi,$$

$$i_3'(0_+)=-10.8=A\left[-42.1\sin\psi+15.2\cos\psi\right].$$

Із цієї системи рівнянь знаходимо A=0,253, ψ=127,7. Таким чином, перехідний струм через конденсатор визначається рівнянням

$$i_3(t)=0.253e^{-42.1t}\sin(15.2t+127.7^\circ).$$

Приклад 7.2. Визначити перехідний струм через конденсатор (рис. 1.20), якщо E =10В, R_1=60 Ом, R_2=15 Ом, R_K=5 Ом, R_i=10 Ом, L=1 мГн, C=10 мкФ.

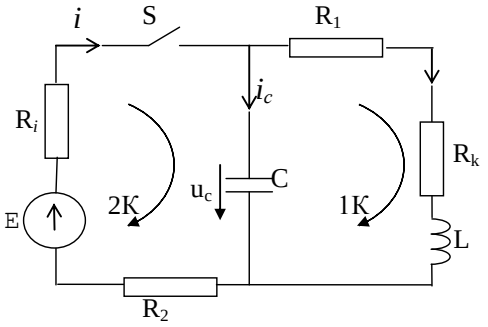


Рисунок 7.20

Розв'язання

1. Складемо систему рівняння за законами Кірхгофа для схеми кола після комутації:

$$\begin{cases} i - i_C - i_L = 0, \\ (R_1 + R_K)\cdot i_L + L\cdot \dfrac{di_L}{dt} - u_C = 0, \\ u_C + (R_2 + R_i)\cdot i = E, \\ i_C = C\cdot \dfrac{du_C}{dt}. \end{cases}$$

2. Визначимо незалежні початкові умови, тобто $u_C(0+)$ та $i_L(0+)$.

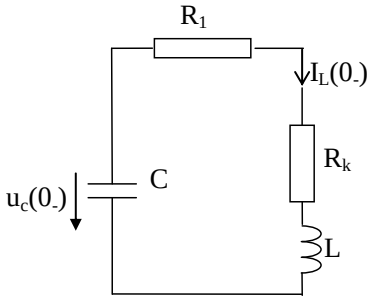


Рисунок 7.21

Для одержання цих значень скористаємося першим та другим законами комутації:

$i_L(0-) = i_L(0) = i_L(0+)$ та $u_C(0-) = u_C(0) = u_C(0+)$.

Зобразимо схему кола до комутації (рис. 1.21).

У цьому колі відсутні джерела, відповідно:

$i_L(0-)=0$ та $u_C(0-)=0$.

Тоді $u_C(0+)=0$, $i_L(0+) =0$.

3. Розрахунок вимушеного режима.

Вимушений (усталений) режим при постійному джерелі буде відповідати схемі, що зображена на рис. 1.22. Вимушена складова струму на котушці індуктивності визначається виразом

$$i_{L.ВИМ} = \frac{\mathrm{E}}{R_1 + R_2 + R_K + R_i} = \frac{10}{60+15+5+10} = 0.111\mathrm{A}.$$

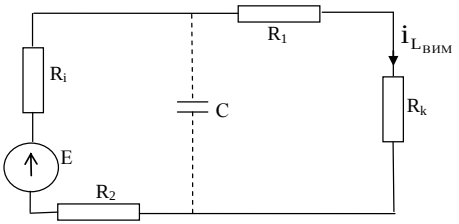


Рисунок 7.22

4. Визначимо корені характеристичного рівняння.

Зобразимо операторну схему заміщення (рис. 7.23)

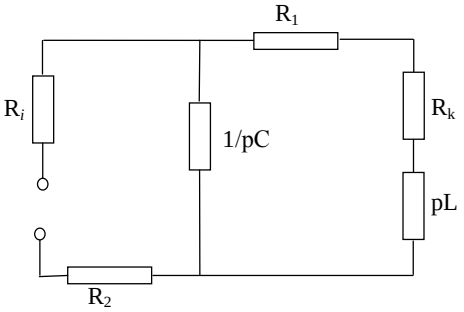


Рисунок 7.23

Запишемо еквівалентний опір відносно точок розриву:

$$Z(p) = R_i + R_2 + \frac{\frac{1}{p \cdot C} \cdot (R_1 + R_K + p \cdot L)}{\frac{1}{p \cdot C} + R_1 + R_K + p \cdot L}.$$

Прирівнюємо його до нуля:

$$R_i + R_2 + \frac{R_1 + R_K + p \cdot L}{1 + (R_1 + R_K + p \cdot L) \cdot p \cdot C} = 0.$$

Спростимо одержаний вираз

$$R_2(1 + (R_1 + R_K + pL)pC) + R_i(1 + (R_1 + R_K + pL)pC) +$$
$$+ R_1 + R_K + pL = 0,$$
$$CL(R_2 + R_i) \cdot p^2 + (R_1R_2C + R_KR_2C + R_iR_1C + R_iR_KC + L) \cdot p +$$
$$+ (R_1 + R_2 + R_i + R_K) = 0.$$

Підставимо числові значення:

$$10^{-5} \cdot 10^{-3}(10+15) \cdot p^2 + (10 \cdot 10^{-5} \cdot (60+5) + 15 \cdot 10^{-5} \cdot (60+5) +$$
$$+ 10^{-3}) \cdot p + 60 + 15 + 10 + 5 = 0.$$

Після спрощення одержимо таке рівняння

$$p^2 + 6{,}9 \cdot 10^4 \cdot p + 3{,}6 \cdot 10^8 = 0.$$

Тоді одержимо такі корені: $p_1 = -0{,}57 \cdot 10^4$ 1/с, $p_2 = -0{,}63 \cdot 10^4$ 1/с.

Корені дійсні та різні, відповідно перехідний процес буде аперіодичним.

Вигляд вільної складової:

$$i_{L.B} = A_1 \cdot e^{-0{,}57 \cdot 10^4 \cdot t} + A_2 \cdot e^{-6.33 \cdot 10^4 \cdot t}$$

Повний струм в індуктивності

$$i_L = 0.111 + A_1 \cdot e^{-0{,}57 \cdot 10^4 \cdot t} + A_2 \cdot e^{-6.33 \cdot 10^4 \cdot t}.$$

Визначимо постійні інтегрування A_1 та A_2.

Перше рівняння для визначення A_1 та A_2 одержимо, використовуючи значення пункту 2. Виразимо струм у індуктивності

$$i_L(0+) = i_L(0) = 0{,}111 + A_1 + A_2.$$

Врахуємо незалежні початкові умови:

$$A_1 + A_2 + 0.111 = 0 \qquad (1)$$

Для одержання другого рівняння запишемо систему рівнянь пункту 1 для моменту часу $t(0_+)$:

$$\begin{cases} i(0_+) = i_L(0_+) + i_C(0_+), \\ (R_1 + R_K)\cdot i_L(0_+) + L\cdot \dfrac{di_L}{dt}\Big|_{t=0_+} - u_C(0_+) = 0, \\ u_C(0_+) + (R_2 + R_i)\cdot i(0_+) = E, \\ i_C(0_+) = C\cdot \dfrac{du_C}{dt}\Big|_{t=0_+}. \end{cases}$$

Підставимо до системи незалежні початкові умови, тоді з другого рівняння системи випливає:

$$L\cdot \frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0_+} = 0 \quad \text{тобто} \quad \frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0_+} = 0. \qquad (*)$$

Тепер продиференціюємо вираз струму i_L, одержаний у пункті 5:

$$\frac{di_L}{dt} = -0.57\cdot 10^4 \cdot A_1 \cdot e^{-0,57\cdot 10^4 t} - 6.33\cdot 10^4 \cdot A_2 \cdot e^{-6,33\cdot 10^4 \cdot t}$$

Запишемо одержане рівняння у момент часу $t=0_+$:

$$\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0_+} = -0.57\cdot 10^4 \cdot A_1 - 6.33\cdot 10^4 \cdot A_2.$$

Врахуємо одержану вище рівність (*) та одержимо друге рівняння:

$$-0.57\cdot 10^4 \cdot A_1 - 6.33\cdot 10^4 \cdot A_2 = 0 \qquad (2)$$

Розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = -0.111, \\ -0.57\cdot 10^4 \cdot A_1 - 6.33\cdot 10^4 \cdot A_2 = 0. \end{cases}$$

Звідси маємо $A_1 = -0.122$, $A_2 = 0.011$.

Тоді одержимо вираз струму у котушці індуктивності

$$i_L(t) = 0.111 - 0.122\cdot e^{-0.57\cdot 10^4 \cdot t} + 0.011\cdot e^{-6.33\cdot 10^4 \cdot t}, \text{ А}.$$

Приклад 7.3. Визначити напругу на другому резисторі (рис. 7.24), якщо e(t) = E = 26 В, R_1 = 2 Ом, R_1 = 9 Ом, L = 11 мГн, C = 360 мкФ.

Розв'язання

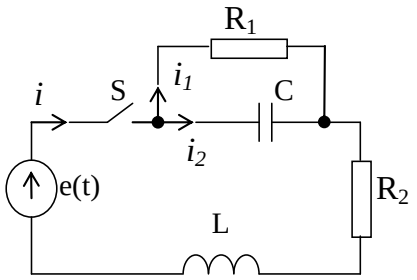


Рисунок 7.24

1. Складемо систему рівнянь за законами Кірхгофа

$$\begin{cases} -i + i_1 + i_2 = 0, \\ u_C + R_2 i + L\dfrac{di}{dt} = \mathrm{E}, \\ i_1 R_1 - u_C = 0, \\ i_R = C\dfrac{du_C}{dt}. \end{cases}$$

Спочатку визначимо чтрум $i(t)$.

2. Незлежні початкові умови

$$u_c(0_-) = u_c(0) = u_c(0_+),\ i_c(0_-) = i_c(0) = i_c(0_+).$$

До комутації $u_c(0_-) = 0$ и $i_c(0_-) = 0$, відповідно $u_c(0) = u_c(0_+) = 0$, $i(0) = i(0_+) = 0$.

3. Розрахуємо вимушений режим

У вимушеному режимі схема має вигляд схеми, що зображена на рис. 7.25.

Визначимо вимушений струм

$$i_{ВИМ} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{26}{2+9} = 2.36\,\text{А}.$$

4. Визначимо корені характеристичного рівняння та виглядає вільною складової струма.

Зобразимо схему без джерела у операторній області (рис. 7.26)

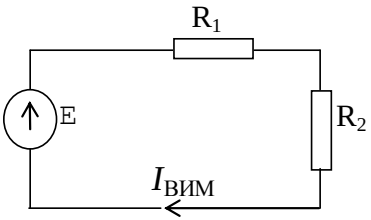


Рисунок 7.25

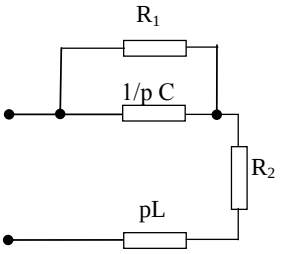


Рисунок 7.26

Знайдемо операторний вхідний опір Z(p)

$$Z(p) = R_2 + pL + \frac{R_1 \cdot \frac{1}{C \cdot p}}{R_1 + \frac{1}{C \cdot p}}.$$

Одержимо рівняння

$$R_2 + pL + \frac{R_1}{R_1 C \cdot p + 1} = 0.$$

Перетворимо одержане рівняння

$$R_1R_2C \cdot p + R_2 + R_1CLp^2 + pL + R_1 = 0,$$
$$R_1CLp_2 + (R_1R_2C + L)p + (R_1 + R_2) = 0.$$

Підставимо числові значення:

$$2 \cdot 360 \cdot 10^{-6} \cdot 11 \cdot 10^{-3} p^2 + (2 \cdot 9 \cdot 360 \cdot 10^{-6} + 11 \cdot 10^{-3})p + (2 + 9) = 0.$$

Після спрощення одержимо квадратне рівняння

$$p^2 + 2{,}21 \cdot 10^3 p + 1{,}39 \cdot 10^6 = 0.$$

Після розв'язання рівняння маємо

$$p_{1,2} = (-1{,}105 \pm j0{,}41) \cdot 10^3 \quad 1/\text{с}.$$

Оскільки корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені, то вільна складова струма має вигляд:

$$i_B = Ae^{-1.105 \cdot 10^3 t} \sin(410t + \varphi).$$

Процес носить коливальний характер.

5. Запишемо вираз для повного струму

$$i = i_{ВИМ} + i_B = 2.36 + Ae^{-1105t} \sin(410t + \varphi) \text{ А}.$$

6. Визначимо постійні інтегрування А та φ.

Перше рівняння для розрахунку А та φ одержуємо з умови $i(0) = 0$, тобто

$$2.36 + A \cdot \sin \varphi = 0. \qquad (1)$$

Для одержання другого рівняння запишемо систему рівнянь за законом Кірхгофа (пункт 1) для моменту $t = 0_+$:

$$\begin{cases} -i(0_+)+i_1(0_+)+i_2(0_+)=0, \\ u_C(0_+)+R_2\cdot i(0_+)+L\left.\dfrac{di}{dt}\right|_{t=0_+}=\mathrm{E}, \\ R_1 i_1(0_+)-u_c(0_+)=0. \end{cases}$$

Врахуємо незалежні початкові умови (пункт 2) та одержимо:

$$L\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0_+}=\mathrm{E}, \quad \text{тбто} \qquad \frac{di}{dt}=\frac{\mathrm{E}}{L}=\frac{26}{11\cdot 10^{-3}}=2.36\cdot 10^3.$$

Тепер продиференціюємо вираз повного струму (пункт 5):

$$\frac{di}{dt}=-1105Ae^{-1105t}\sin(410t+\varphi)+410Ae^{-1105t}\cos(410t+\varphi).$$

Запишемо його для t = 0_+:

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0_+}=-1105\cdot A\sin\varphi+410A\cos\varphi$$

та прирівняємо до раніше розрахованого значення:

$$-1105\ A\cdot\sin\varphi+410A\cdot\cos\varphi=2.36\cdot 10^3 \qquad (2)$$

Одержимо друге рівняння для розрахунку сталих інтегрування

$$\begin{cases} A\cdot\sin\varphi=-2.36, \\ -1105A\cdot\sin\varphi+410\ A\cdot\cos\varphi=2.36\cdot 10^3. \end{cases}$$

Звідси знайдемо $A=-\dfrac{2.36}{\sin\varphi}$.

Підставимо оержаний вираз у друге рівняння системи

$$-1105\cdot\left(-\frac{2.36}{\sin\varphi}\right)\cdot\sin\varphi+410\left(-\frac{2.36}{\sin\varphi}\right)\cdot\cos\varphi=2.36\cdot 10^3.$$

$$2607.8-967.6\ \mathrm{ctg}\varphi=2360.$$

$$\mathrm{ctg}\varphi=0.257.$$

$\varphi = 75.36^o$ или $\varphi = 1.32$ рад.

$$A=-\frac{2.36}{\sin 75.63^0}=-2.44,$$

тоді струм буде дорівнювати

$$i = 2.36 - 2.44\, e^{-1105t} \sin(410t + 1.32)\ \text{A}.$$

За умовою задачі потрібно знайти напругу u_{R_2}

$$u_{R_2} = R_2 \cdot i\,.$$

Підставимо числові значення

$$u_{R_2} = 9(2.36 - 2.44e^{-1105t} \sin(410t + 1.32)) =$$

$$= 21.24 - 21.95e^{-1105t} \sin(410t + 1.32)\ \text{В}$$

або

$$u_{R_2} = 21.24 - 21.95e^{-1105t} \sin(410t + 75.63^{o}),\ \text{В}.$$

7.8 Метод змінних стану

Для розрахунків перехідних процесів у колах, що містять три та більше реактивних елементів, застосовують метод змінних стану, що дозволяє сформувати систему диференціальних рівнянь у формі Коші (у нормальній формі) та розв'язати її операторним або чисельним методом.

За змінні стану у електричному колі вибирають струми i_L в індуктивностях і напруги u_C на ємностях, тобто ті величини, які визначають загальний порядок системи диференціальних рівнянь. Ці величини задають у кожний момент часу енергетичний стан електричного кола, тому у методу є така назва – метод змінних стану.

Порядок складання рівнянь наступний. Спочатку записують рівняння кола за законами Кірхгофа, потім їх перетворюють шляхом виключення інших змінних так, щоб залишилися тільки змінні стани, їх похідні та джерела. Отриману систему рівнянь записують у матричній формі $\underline{x}' = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{y}$,

де $\underline{x} = \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ \vdots \\ u_{Ck} \end{bmatrix}$; $\underline{x}' = \begin{bmatrix} i'_{L1} \\ i'_{L2} \\ \vdots \\ u'_{Ck} \end{bmatrix}$; $\underline{y} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ J_k \end{bmatrix}$;

[A] та [B] – матриці, обумовлені структурою кола та значеннями її параметрів.

Аналогічно записують рівняння для вихідних величин

$$[y]=[C][x]+[D][u],\ \text{де}\ [y]=\begin{bmatrix} i_R \\ i_C \\ \vdots \\ u_L \end{bmatrix}.$$

Розв'язання матричних рівнянь мають вигляд

$$\begin{aligned} [x(t)] &= e^{[A]t}[x(0)] + \int_0^t e^{[A](t-\tau)}[B][u(\tau)]\,d\tau; \\ [y(t)] &= [C]e^{[A]t}[x(0)] + \int_0^t [C]e^{[A](t-\tau)}[B][u(\tau)]\,d\tau + [D][u(t)], \end{aligned} \qquad (7.24)$$

де $[x(0)]$ – матриця початкових станів x, $e^{[A]t}$ – перехідна матриця стану системи, названа інакше фундаментальною.

Для визначення фундаментальної матриці $e^{[A]t}$ існує кілька способів. Однак останнім часом, завдяки широкому використанню обчислювальної техніки, необхідно розв’язувати систему диференціальних рівнянь чисельним методом, використовуючи стандартні програми, наприклад MATHCAD.

Приклад 7.4. Записати рівняння для схеми рис. 7.27 методом змінних стану.

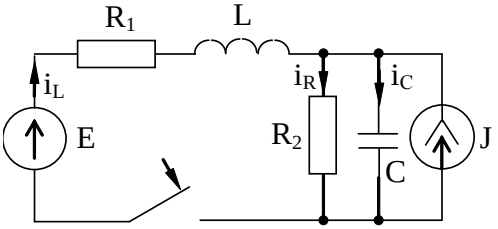


Рисунок 7.27

Розв'язання

1. Записуємо спочатку рівняння за законами Кірхгофа

$$\begin{cases} i_R + i_C - i_L = J, \\ R_1 i_L + L\dfrac{di_L}{dt} + R_2 i_R = E, \\ u_C - R_2 i_R = 0. \end{cases}$$

2. Перетворимо останнє рівняння

$$u_C = R_2 i_R = R_2 (J + i_L - i_C) = R_2 (i_L - C\frac{du_C}{dt} + J)$$

та потім передостаннє рівняння

$$L\frac{di_L}{dt} = E - R_1 i_L - R_2 i_R = E - Ri_L - u_C .$$

3. Переносимо похідні i'_L та i'_C у ліву частину рівнянь

$$\begin{cases} i'_L = -\dfrac{R_1}{L} i_L - \dfrac{1}{L} u_C + \dfrac{1}{L} E, \\ u'_C = \dfrac{1}{C} i_L - \dfrac{1}{R_2 C} u_C + \dfrac{1}{C} J. \end{cases}$$

4. У матричній формі система диференціальних рівнянь має вигляд

$$\begin{bmatrix} i'_L \\ u'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_1}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{R_2 C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ J \end{bmatrix}, \text{ або}$$

$$\vec{x}' = A\vec{x} + B\vec{u}.$$

5. Доповнюючи цю систему початковими умовами $i_L(0_+)=0$, $u_C(0_+)=JR_2$, можна визначати $i_L(t)$, і $u_C(t)$ за допомогою програми MATHCAD.
6. Якщо потрібно визначити інші величини i_R, i_C, u_L, то складемо алгебраїчні рівняння

$$\begin{cases} i_R = \dfrac{u_C}{R_2}, \\ i_C = i_L - \dfrac{u_C}{R_2} + J, \\ u_L = -R_1 i_L - u_C + E. \end{cases}$$

7. У матричному вигляді система алгебраїчних рівнянь

$$\begin{bmatrix} i_R \\ i_C \\ u_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{R_2} \\ 1 & -\dfrac{1}{R_2} \\ -R_1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ J \end{bmatrix} \text{ або } \mathbf{y} = [\mathbf{C}]\mathbf{x} + [\mathbf{D}]\mathbf{u}.$$

7.9 Застосування інтеграла Дюамеля

У лінійних електричних колах струм у будь-якій гілці може бути представлений у вигляді добутку напруги на вході кола на вхідну g_{kk} або взаємну g_{km} провідність

$$i_k = Umgkm.$$

При включенні кола під постійну напругу це співвідношення також має силу. При цьому і струм, і ця провідність будуть функціями часу, тобто

$i_k(t) = Umgkm(t)$, де $g_{km}(t)$ – перехідна провідність.

У загальному випадку перехідна провідність $g_{km}(t)$ визначається як відношення перехідного струму у k-й гілці до напруги у m-й гілці при відсутності джерел у інших гілках

$$g_{km}(t) = \frac{i_k(t)}{U_m}. \qquad (7.25)$$

Аналогічна напруга на деякій ділянці кола під час перехідного процесу є також функцією часу

$$u_{ab}(t) = Uh(t),$$

де $h(t)$ – перехідна функція, обумовлена як відношення напруг Uab та U при відсутності в колі інших джерел.

Звичайно для визначення $g(t)$ та $h(t)$ використовують постійну напругу $U=1B$. Однак знаючи величини $g(t)$ та $h(t)$, можна визначати струм або напругу на ділянці кола при включенні цього кола під напругу складної форми.

Нехай до кола з нульовими початковими умовами й відомою перехідною провідністю $g(t)$ підключається напруга $u(\tau)$ (рис. 1.21, а). Для того щоб визначити струм у колі у момент часу t, замінимо плавну криву східчастої та додамо струми від початкової напруги $u(0)$ і від усіх сходів напруги, що вступають у дію із запізненням у часі

$$i(t)=u(0)g(t)+\Sigma u'(\tau)\Delta\tau\cdot g(t-\tau-\Delta\tau),$$

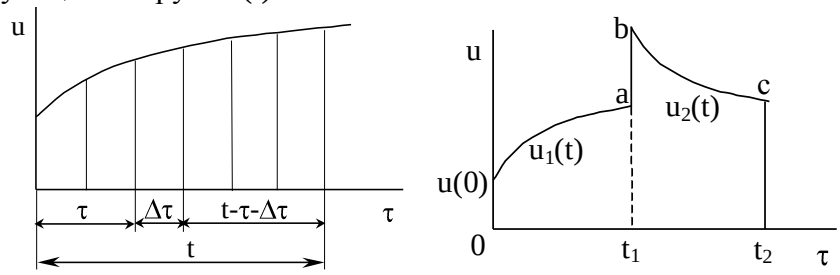
де кожна сходинка збільшення напруги визначається у такий спосіб:

$$\Delta u=\frac{du}{d\tau}\Delta\tau=u'(\tau)\Delta\tau.$$

Замінюючи кінцевий інтервал часу τ на нескінченно малий dτ і переходячи до інтеграла, одержимо:

$$i(t)=u(0)g(t)+\int_0^t u'(\tau)g(t-\tau)d\tau. \qquad (7.26)$$

Цю формулу називають **інтегралом Дюамеля**. З її допомогою можна знайти перехідну напругу на деякій ділянці кола, якщо замість перехідної провідності $g(t)$ використовувати перехідну функцію напруги $h(t)$.



а) б)

Рисунок 7.21

Якщо вхідна напруга змінюється за більш складним законом – стрибком у певні моменти часу (рис. 1.21, б), то струм визначають як суму струмів від усіх напруг, що впливають на коло до моменту часу t.

Для моменту часу $t_1<t<t_2$

$$i(t)=u(0)g(t)+\int_0^{t_1}u_1'(\tau)g(t-\tau)d\tau+(u_b-u_a)g(t-t_1)+$$

$$+\int_{t_1}^{t}u_2'(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Для часу $t>t_2$

$$i(t)=u(0)g(t)+\int_0^{t_1}u_1'(\tau)g(t-\tau)d\tau+(u_b-u_a)g(t-t_1)+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}u_2'(\tau)g(t-\tau)d\tau+(0-u_c)g(t-t_2).$$

Приклад 7.5. Визначити струм в індуктивній котушці (Rk=0.5 Ом, Lk=1 Гн) через 5 с після підключення її під напругу, що змінюється за складним законом (рис. 1.21, б), якщо $u_1(\tau)=150-100e^{-0.25\tau}$ діє до часу $t_1=4$ з, а

$u_2(\tau)=50+100e^{-0.4(\tau-t_1)}$ – до часу $t_2=6$ с.

Розв'язання

1. Визначаємо перехідну провідність g(t). Для цього знаходимо струм у RL-колі при включенні її під постійну напругу U=1 В. Раніше було показано (див. включення RL-кола під постійну напругу)

$$g(t)=i(t)_{U=1}=\frac{1}{R}\left(1-e^{\frac{R_k}{L_k}t}\right)=2\left(1-e^{-0.5t}\right).$$

2. Знаходимо похідні напруг

$$u_1'(\tau)=100\cdot 0.25e^{-0.25t}=25e^{-0.25t},$$

$$u_2'(\tau) = -100 \cdot 0.4e^{-0.4t} = -40e^{-0.4t}.$$

3. Визначаємо закон зміни струму у загальному вигляді для $t_1<t<t_2$

$$i(t) = u_1(0)g(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau)g(t-\tau)d\tau + (u_b - u_a)g(t-t_1) +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} u_2'(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

$$= 100\left(-e^{-0.5t}\right) + 200\left(1.632 - 1.718e^{-0.5t}\right) + \frac{36.9}{0.5}\left(-e^{-0.5(t-t_1)}\right) -$$

$$- \frac{40}{0.1 \cdot 0.5}\left[-\frac{0.5}{0.4}e^{-0.4t} + \frac{0.5-0.4}{0.4}e^{-0.4t_1} + e^{-0.4t_1}e^{-0.5(t-t_1)}\right]e^{-0.4t_1}.$$

4. Підставляємо у отриманий вираз t_1=4 с, t=5 с і одержуємо i=204.3 А.

7.10 Операторний метод аналізу перехідних процесів

7.10.1 Загальні положення

Операторний метод розрахунків перехідних процесів заснований на заміні функцій часу $f(t)$ функціями комплексної частоти $p=\sigma+j\omega$ за допомогою перетворення Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt. \qquad (7.27)$$

При цьому операції диференціювання та інтегрування замінюються операціями множення та ділення, а система диференціальних рівнянь перетвориться у систему алгебраїчних рівнянь. Розв'язавши ці алгебраїчні рівняння та визначивши у такий спосіб зображення шуканих величин, можна потім за допомогою зворотного перетворення Лапласа знайти функцію часу:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty} F(p)e^{pt}dp. \qquad (7.28)$$

Такий перехід з часової області у частотну область, а потім знову у часову схожий на операції логарифмування та на комплексний метод розрахунків кіл при синусоїдальних струмах. Функціям у часовій області $u(t)$, $i(t)$, $f(t)$ відповідають функції $U(p)$, $I(p)$, $F(p)$. Відповідність між функціями записується як $F(p) \doteq f(t)$.

Наступні зображення функцій найчастіше часто зустрічаються:

1) $A \doteq A/p$; 2) $t \doteq \frac{1}{p^2}$; 3) $\delta(t) \doteq 1$;

4) $e^{\alpha t} \doteq \frac{1}{p-\alpha}$; 5) $1-e^{\alpha t} \doteq \frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$;

6) $te^{-\alpha t} \doteq \frac{1}{(p+\alpha)^2}$; 7) $\sin\omega t \doteq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$;

8) $\frac{1}{a-b}\left(e^{-at}-be^{-bt}\right) \doteq \frac{p}{(p+a)(p+b)}$;

9) $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \doteq \frac{1}{p^n}$; 10) $e^{-\alpha t}\sin\omega t \doteq \frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$;.

11) $\cos\omega t \doteq \frac{p}{p^2+\omega^2}$

Зображення похідної має вигляд

$$\frac{d}{dt}f(t) \doteq pF(p) - f(0),$$

де $f(0)$ – значення функції $f(t)$ при t=0, $F(p)$ – зображення функції $f(t)$.

Зображення другої похідної має вигляд

$$\frac{d^2}{dt^2}f(t) \doteq p^2F(p) - pf(0) - \frac{d}{dt}f(t)\Big|_{t=0}.$$

Зображення інтеграла має вигляд

$$\int_0^t f(t)dt \doteq \frac{F(p)}{p}.$$

Відповідно до цих формул визначимо зображення напруги на конденсаторі у такий спосіб:

$$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i dt \doteq \frac{I(p)}{pC} + \frac{u_C(0)}{p}, \qquad (7.29)$$

а напруга на індуктивному елементі –

$$u_L = L\frac{di}{dt} \doteq pLI(p) - Li(0). \qquad (7.30)$$

7.10.2 Основні теореми перетворення Лапласа

1. Теорема зсуву у області оригіналів (теорема запізнювання)

$$f(t-\tau) \doteq e^{-pt}F(p).$$

Доводиться безпосереднім застосуванням перетворення Лапласа.

2. Теорема зсуву у області зображень

$$F(p-\lambda) \doteq e^{\lambda t} f(t).$$

3. Теорема про зміну масштабу (теорема подоби)

$$f(\lambda t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

4. Граничні співвідношення

$$\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0_+); \quad \lim_{p\to 0} pF(p) = f(\infty) = f_{уст}.$$

Початкове значення функції $f(0_+)$ можна знайти, визначаючи межу виразу $pf(p)$ при $p\to\infty$, а встановлене значення f(t), тобто вимушена складова $f_{пр}(t)$, визначається як границя виразу $pf(p)$ при $p\to 0$.

7.10.3 Розрахунки кіл операторним методом

Диференціальне рівняння послідовного RLC-кола при включенні під постійну напругу має вигляд

$$Ri + L\frac{di}{dt} + u_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i dt = E.$$

Використовуючи перетворення Лапласа для кожного доданка, запишемо це рівняння у операторній формі:

$$RI(p)+pLI(p)-Li(0_+)+\frac{U_C(0)}{p}+\frac{I(p)}{pC}=\frac{E}{p},$$

$$\left(R+pL+\frac{1}{pC}\right)I(p)=\frac{E}{p}+Li(0_+)-\frac{U_C(0)}{p}=Z(p)I(p),$$

де $Z(p)=R+pL+\frac{1}{pC}$ - операторний опір кола.

Одержали закон Ома у операторній схемі

$$I(p)=\frac{\frac{E}{p}-\frac{U_C(0)}{p}+Li(0)}{Z(p)}. \qquad (7.31)$$

Аналогічно запишемо рівняння Кірхгофа для миттєвих значень струмів і напруг

$$\sum i_k=0;\quad \sum iR+\sum L\frac{di}{dt}+\sum\frac{1}{C}\int idt=\sum e(t).$$

Використовуючи перетворення Лапласа для кожного доданка, запишемо ці рівняння у операторной формі:

$$\sum I_k(p)=0,$$

$$\sum Z_k(p)I_k(p)=\sum E_k(p)+\sum L_k i_k(0)-\sum\frac{U_C(0)}{p}. \qquad (7.32)$$

У отриманих рівняннях, поряд з діючими зовнішніми джерелами ЕРС, з'явилися доданки, що ураховують початкові умови $\frac{u_C(0)}{p}$ та $Li(0)$. Їх іноді називають **внутрішніми ЕРС** і зображують на операторних схемах заміщення кола при розрахунках перехідних процесів. При цьому їх напрямки збігаються з додатними напрямками струмів у гілках схеми, але величина $Li(0)$ – додатна, а $\frac{U_C(0)}{p}$ – від'ємна (рис. 1.16, б).

Відзначимо, що замість системи інтегрально-диференціальних рівнянь для миттєвих значень струмів і напруг отримана система алгебраїчних рівнянь у операторній формі.

Розв'язуючи її, визначимо зображення шуканих струмів і напруг.

Перехід від зображень до оригіналів можна виконати, використовуючи відповідні таблиці або застосовуючи формулу розкладання:

$$I(p)=\frac{N(p)}{M(p)}\doteq i(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{N(p_k)}{M'(p_k)}e^{p_k t}=\frac{N(p_1)}{M'(p_1)}e^{p_1 t}+\frac{N(p_2)}{M'(p_2)}e^{p_2 t}+\ldots,$$

де

$$N(p)=a_n p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_0;$$

$$M(p)=b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_0,\ m\ge n;$$

pk – корені рівняння $M(p)=0$;

$M'(p)$ – похідна від знаменника.

Якщо один із коренів дорівнює 0, то доданок $\frac{N(0)}{M'(0)}e^0$ – дорівнює вимушеній складовій, що обумовлена постійною ЕРС.

Якщо серед коренів є пара комплексно-спряжених коренів, то відповідний їм доданок у зображенні буде гармонічною функцією. При $p_{1,2}=-\delta\pm j\omega$

$$i(t)=2\,\mathrm{Re}\left[\frac{N(p_1)}{M'(p_1)}e^{p_1 t}\right]=Ae^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi).$$

Приклад 7.6. Визначити струм $i_1(t)$ при перехідному процесі у схемі (рис. 1.16, а), якщо U=125 В, R_1=50 Ом, R_2=200 Ом, R_3=250 Ом, L=10 мГн, З=5 мкФ.

Розв'язання

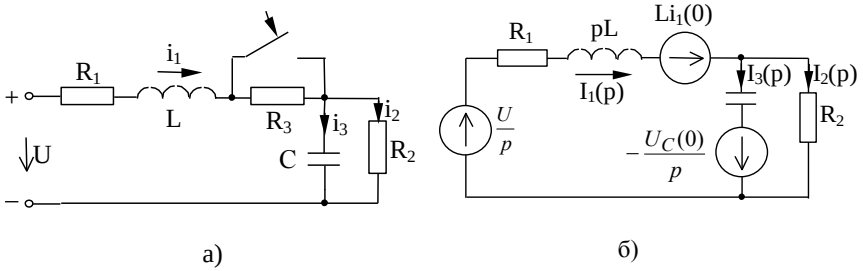
1. Задамо додатний напрямок струмів і визначаємо величину струму через індуктивність $L_1(0_-)$ та напругу на конденсаторі $u_C(0_-)$ до комутації

$$i_1(0_-)=\frac{U}{R_1+R_2+R_3}=\frac{125}{500}=0.25A,$$

$$u_C(0_-)=R_2 i(0_-)=200\cdot 0.25=50B.$$

2. Накреслимо операторну схему заміщення для схеми, що вийшла після комутації, у якій, крім зовнішнього джерела, з'яв-

ляться внутрішні джерела ЕРС (рис. 1.22, б) $Li_1(0)$ і $-\frac{U_C(0)}{p}$ початкові умови, що враховують.



а) б)

Рисунок 7.22

3. Складемо рівняння за законами Кірхгофа для схеми, що зображена на рис. 1.16, б для визначення зображень струмів

$$\begin{cases} I_1(p) - I_2(p) - I_3(p) = 0, \\ R_1 I_1(p) + pLI_1(p) + R_2 I_2(p) = \dfrac{U}{p} + Li_1(0), \\ \dfrac{I_3(p)}{pC} - R_2 I_2(p) = -\dfrac{U_C(0)}{p}. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему рівнянь, знайдемо:

$$I_1(p) = \frac{p^2 CLR_2 i_1(0) + p\left(UCR_2 + Li(0) - U_C(0)CR_2\right) + U}{p\left(LCR_2 p^2 + \left(CR_1R_2 + L\right)p + R_1 + R_2\right)} = \frac{N(p)}{M(p)}.$$

Підставляючи числові значення, одержимо:

$$I_1(p) = \frac{2.5\cdot 10^6 p^2 + 0.0775p + 125}{p\left(10^{-5} p^2 + 0.06p + 250\right)}.$$

Прирівнявши знаменник нулю M(p)=0, знайдемо корені

$p_1=0$, $p_{2,3}=-3000\pm j4000$ c^{-1}.

Визначимо похідну виразу, що стоїть у знаменнику

$M'(p)=3\cdot 10^{-5}p^2+0.12p+250.$

Розрахуємо оригінал струму $i_1(t)$

$$i_1(t) = \frac{N(0)}{M'(0)} e^0 + 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{N(p_2)}{M'(p_2)} e^{p_2 t}\right] =$$

$$= \frac{125}{250} + 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{(-125 + j250) e^{(-3000+j4000)t}}{-320 - 240j}\right] =$$

$$= 0.5 + 2\left[\mathrm{Re}\frac{281 e^{j116^\circ 30'} \cdot e^{j4000t}}{400 e^{j216^\circ 50'}}\right] e^{-3000t}$$

$$= 0.5 + 1.4 e^{-3000t} \cos(4000t - 100^\circ 20') =$$

$$= 0.5 + 1.4 e^{-3000t} \sin(4000t - 10^\circ 20')\ A.$$

7.11 Спектральний метод аналізу перехідних процесів

7.11.1 Загальні положення

Спектральний (частотний) метод застосовується при аналізі реакції кола на вплив імпульсних сигналів, а також при розрахунках перехідних процесів (аналогічно операторному методу). Він дає можливість перетворити функцію часу $f(t)$ у функцію частоти $S(j\omega)$, яку називають **спектром функції $f(t)$**. Це перетворення виконується за допомогою інтеграла Фур'є (прямого перетворення Фур'є)

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt, \qquad (7.33)$$

яке одержують із формули для ряду Фур'є

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k) = A_0 + \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} e^{jk\omega t} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega t}\, dt$$

граничним переходом при прямуванні T до нескінченності. На функцію $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt$ накладається обмеження – необхідне, щоб

вона була кінцева (не нескінченна). Ряд функцій не задовольняє цій умові.

Для знаходження функцій часу $f(t)$ за відомим спектром $S(j\omega)$ використовують зворотне перетворення Фур'є

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega. \qquad (7.34)$$

Порівнюючи формули перетворень Лапласа та Фур'є, зазначимо, що перетворення Фур'є є частиним випадком перетворення Лапласа, тобто

$$S(j\omega)=F(p)_{p=j\omega}.$$

Тому розглянуті раніше формули відповідності та властивості перетворення Лапласа справедливі і для перетворення Фур'є.

Так, розглянутий раніше закон Ома у операторній формі тепер буде мати такий вигляд:

$$I(j\omega)=\frac{E(j\omega)+Li(0)-\dfrac{U_C(0)}{j\omega}}{R+j\omega L+\dfrac{1}{j\omega C}}. \qquad (7.35)$$

Знаменник цього виразу

$$Z(j\omega)=R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}.$$

Знаменик являє собою комплексний опір кола, що застосовувалося раніше для розрахунків ланцюгів синусоїдального струму (в усталеному режимі). У той же час це частотна характеристика двополюсника, яка може бути отримана експериментально в усталеному режимі роботи. Якщо вхідний сигнал має вигляд деякого імпульсу, то визначивши його спектр $S(j\omega)$ і, знаючи частотну характеристику двополюсника $Z(j\omega)$, можна знайти спектр струму $I(j\omega)$ і потім перехідний струм $i(t)$. Аналогічно для чотириполюсника, знаючи передавальну функцію $H(j\omega)$, можна визначити спектр вихідного сигналу:

$$U_2(j\omega)=H(j\omega)S(j\omega)$$

і потім знайти залежність вихідного сигналу від часу $u_2(t)$.

Слід мати на увазі, що спектр функції, передавальна функція та частотна характеристика кола, як і будь-яка комплексна величина, можуть бути подані у декількох виглядах. Наприклад,

$$H(j\omega) = H(\omega)e^{j\theta(\omega)} = B(\omega) + jM(\omega),$$

де $H(\omega)$ – амплітудно-частотна характеристика (АЧХ);

$\theta(\omega)$ – фазочастотна характеристика (ФЧХ);

$B(\omega)$ – дійсна характеристика;

$M(\omega)$ – уявна характеристика.

Якщо передавальна функція безрозмірна, то вводять поняття логарифмічної амплітудно-фазовою характеристики (ЛАХ)

$$\ln H(j\omega) = \ln H(\omega)e^{j\theta(\omega)} = \ln H(\omega) + j\theta(\omega).$$

При цьому $\ln h(j\omega)$ вимірюється у неперах (Нп) або перетворюють у інші одиниці – децибели (дБ), вважаючи

1 дБ=0.115 Нп, або 1 Нп=8.7 дБ.

Шкалу частот теж будують часто у логарифмічному масштабі. Інтервал частот, відповідний до подвоєння частоти, називають **октавою**, а відповідний десятикратному відношенню частот – **декадою** (1 декада = 3.32 октави).

7.11.2 Методика розрахунку частотним методом

Розрахунки перехідних процесів у звичайних електричних колах спектральним методом виконують порівняно рідко, зазвичай використовують для цих цілей операторний метод. Однак, коли частотна характеристика досліджуваного кола знята експериментально або коли вхідний вплив має характер окремих імпульсів, застосування спектрального методу цілком виправдане. При цьому, визначивши спектр вихідної величини, її оригінал $f(t)$ знаходять, використовуючи теорему розкладання або за формулою:

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_{0+}^{\infty} M(\omega)\sin\omega t d\omega + \frac{1}{\pi}\int_{0-}^{0+} M(\omega)\sin\omega t d\omega.$$

У цій формулі другий доданок найчастіше дорівнює нулю, оскільки $\sin\omega t=0$ при $\omega=0$.

Для обчислення першого доданка слід знати значення деяких невласних інтегралів

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega=\pi\left[1(t)-\frac{1}{2}\right]=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega=\pi\left[1(t)-\frac{1}{2}\right]=\frac{\pi}{2},\quad \int_0^{\infty}\frac{\omega\sin\omega t}{\alpha^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha t},$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\omega\cos\omega t}{\alpha^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha t},\quad \int_0^{\infty}\frac{\alpha\sin\omega t}{\omega(\alpha^2+\omega^2)}d\omega=\frac{\pi}{2\alpha}(1-e^{-\alpha t}),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega t d\omega=2\pi\delta(t),\quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)e^{j\omega}d\omega=1.$$

а також спектри одиничної східчастої функції

$$1(t)\doteq S(j\omega)=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}.$$

та імпульсної функції (Дірака) $\delta(t)\doteq S(j\omega)=1$.

Приклад 7.7. Визначити перехідний струм i(t) при підключенні послідовно включених елементів R та L під постійну напругу U.

Розв'язання

1. Визначаємо частотну характеристику кола $Z(j\omega)=R+j\omega L$.
2. Знаходимо спектр вхідного впливу, використовуючи одиничну східчасту функцію

$$U(j\omega)=U\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right].$$

3. Розраховуємо спектр струму

$$I(j\omega)=\frac{U(j\omega)}{Z(j\omega)}=U\left[\frac{\pi\delta(\omega)}{R+j\omega L}+\frac{1}{j\omega(R+j\omega L)}\right].$$

4. Відокремлюємо дійсну та уявну частини спектра струму

$$I(j\omega) = B(\omega) + jM(\omega) =$$

$$= \frac{U}{L^2(\alpha^2+\omega^2)}\left[R\pi\delta(\omega) - L - j\left(\omega L\pi\delta(\omega) + \frac{R}{\omega}\right)\right],$$

де $\alpha = \frac{R}{L}$.

5. Знаходимо перехідний струм

$$i(t) = \frac{2}{\pi}\int_{0+}^{\infty} M(\omega)\sin\omega t d\omega = \frac{2U}{\pi}\int_{0+}^{\infty}\frac{R\sin\omega t d\omega}{L^2(\alpha^2+\omega^2)} = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\alpha t}\right).$$

Приклад 7.8. Імпульс напруги $K=U_0T$ впливає на коло послідовно включених R і C. При цьому $T<<RC$. Визначити перехідний струм.

Розв'язання

1. Визначаємо спектр вхідного впливу, представляючи імпульс через δ-функцію

$$f(t)=K\delta(t); \qquad S(j\omega)=K=U_0T.$$

2. Знаходимо частотну характеристику кола

$$Z(j\omega) = R + \frac{1}{j\omega C} = \frac{1+j\omega CR}{j\omega C}.$$

3. Розраховуємо спектр струму

$$I(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{Z(j\omega)} = \frac{U_0Tj\omega C}{1+j\omega CR} = \frac{U_0T}{R}\frac{(\omega^2+j\alpha\omega)}{(\alpha^2+\omega^2)}.$$

4. Визначаємо перехідний струм, використовуючи відоме зворотне перетворення Фур'є

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[B(\omega)\cos\omega t + M(\omega)\sin\omega t\right]d\omega.$$

Для цього перетворимо спектр струму

$$I(j\omega) = B(\omega) + jM(\omega) = \frac{U_0T\omega^2}{R(\alpha^2+\omega^2)} + j\frac{U_0T\alpha\omega}{R(\alpha^2+\omega^2)}.$$

Тоді одержимо

$$i(t)=\frac{U_0T}{\pi R}\int_0^{\infty}\left[\frac{\omega^2\cos\omega t}{\alpha^2+\omega^2}-\frac{\alpha\omega\sin\omega t}{\alpha^2+\omega^2}\right]d\omega=$$

$$=\frac{U_0T}{\pi R}\left[\int_0^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}\right)\cos\omega t d\omega-\int_0^{\infty}\frac{\alpha\omega\sin\omega t}{\alpha^2+\omega^2}d\omega\right]=$$

$$=\frac{U_0T}{R}\left[\delta(t)-\alpha e^{-\alpha t}\right].$$

Таким чином, перехідний струм виходить від'ємним, обумовленим розрядом конденсатора, який розрядився під час короткочасного стрибка додатного струму до напруги

$$\frac{Q_0}{C}=\frac{U_0T}{RC}=\alpha U_0T.$$

7.12 Передача сигналів через чотириполюсні кола

У радіотехніці та імпульсній техніці дослідження питань проходження сигналів через різні електричні кола найбільш ефективно виконується спектральним методом. Так, аналіз умов проходження сигналів без спотворення форми через підсилювачі, фільтри та інші обладнання виконується у такий спосіб.

Допустимо, що на вхід деякого чотириполюсника з передавальною функцією $K(j\omega)=K(\omega)ej^{\theta(\omega)}$ при нульових початкових умовах впливає сигнал $f_1(t)$ спектр, що має, $S_1(j\omega)$. Тоді на виході цього чотириполюсника з'явиться сигнал $f_2(t)$, спектр якого $S_2(j\omega)=K(j\omega)S_1(j\omega)$.

У багатьох випадках припустимо, щоб сигнал $f_2(t)$ у порівнянні з $f_1(t)$ мав ослаблення nf запізнення на якийсь час t_0, тобто

$$f_2(t)=af_1(t-t_0),$$

але неприпустиме спотворення форми імпульсу. Застосуємо перетворення Фур'є до функції $f_2(t)$, тобто визначимо її спектр. Враховуючи теорему зсуву, знайдемо:

$$S_2(j\omega)=a_1S_1(j\omega)e^{-j\omega t_0}.$$

Порівнюючи спектри $S_2(j\omega)$, знаходимо, що

$$K(j\omega)=K(\omega)e^{j\theta(\omega)}=ae^{-j\omega t_0}.$$

Отже, для проходження імпульсу або модульованого коливання через чотириполюсник без викривлення форми необхідно, щоб модуль передавальної функції був постійний (не залежав від частоти), а аргумент $\theta(\omega) = -\omega t_0$ лінійно змінювався при зміні частоти.

У реальних чотириполюсниках це може бути виконане лише приблизно у деякій смузі частот, яку називають **смугою пропущення**. Прийнято визначати смугу пропущення значеннями ω, за яких $\frac{K_{\max}(\omega)}{K_{\min}(\omega)} = \sqrt{2}$.

Якщо все ж таки сигнал спотворюється, то ступінь викривлення можна розрахувати або визначивши за $S_2(j\omega)=K(j\omega)S(j\omega)$ оригінал $f_2(t)$ та прирівнявши його з $f_1(t)$, що не завжди вдається виконати, або іншим способом, також заснованому на спектральних методах. Уважають, що викривлення форми фронту імпульсу залежить від властивостей передавальної функції $K(j\omega)$ на високих частотах, а викривлення вершини імпульсу визначається властивостями передавальної функції на низьких частотах. Для цього з основної схеми досліджуваного обладнання формують дві розрахункові схеми, відповідно для високих та низьких частот. Першу розрахункову схему одержують із повної схеми шляхом закорочення конденсаторів, включених пралельно резистивним елементам (вважаючи, що вони мало впливають на величини струмів). Другу розрахункову схему одержують, закоротивши індуктивні елементи за шляхом проходження сигналу (вони за низької частоти мають малий опір). Для отриманих схем становлять характеристичні рівняння (вони мають значно менший порядок, чим для основної схеми). Досліджуючи отримані схеми операторним методом, можна виявити, які елементи впливають на викривлення сигналу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник.- М.: Гардарики, 2002. – 640 с.
2. Зевеке Г.В., Ионкин П.А. и др. Основы теории цепей: учебник для вузов. - М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.
3. Перхач В.С. Теоретична електротехніка. Лінійні кола. - К: Вища школа, 1992. – 439 с.
4. Рибалко М.П., Есауленко В.О., Костенко В.І. Теоретичні основи електротехніки. Лінійні електричні кола: підручник. – Донецьк: Новий світ, 2003. - 513с.
5. Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники: учеб. для вузов: в 3 т./ К.С. Демирчан, Л.Р. Нейман, В.Л. Чечурин, Н.В. Коровкин. - 4-е изд., доп. для самостоятельного изучения курса. - Питер, 2004. – Т.1. - 462 с.
6. Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники: учеб. для вузов: в 3 т./ К.С. Демирчан, Л.Р. Нейман, В.Л. Чечурин, Н.В. Коровкин. - 4-е изд., доп. для самостоятельного изучения курса. - Питер, 2004. – т.2. - 575 с.
7. Коровкин Н. В. Теоретические основы электротехники. Сборник задач: учеб. пособие / Н.В. Коровкин, Е.Е. Селина, В.А. Чечурин. - СПб.: Питер, 2004. - 511 с.
8. Попов В.П. Основы теории цепей: Учебник для вузов спец. «Радиотехника». – М.: Высш. шк., 1985. – 490с.
9. Шебес М.Р., Каблукова М.В. Задачник по теории линейных эл. цепей: учеб. пособ. для электротехнич., радиотехнич. спец. вузов. – 4 изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1990. – 544с.
10. Електротехніка та електроніка. Теоретичні відомості, розрахунки та дослідження за підтримкою комп'ютерних технологій: навчальний посібник / за заг. ред. А. А. Щерби та В. М. Рябенького. – К.: Корнійчук, 2007. – 488с.
11. Основы теории цепей: Примеры и задачи / О. В. Беляев, М. В. Быстров, В. Л. Коданев, Е. А. Смирнов, Р. А. Халимов, В. В. Штейнбрехер. – М.: Радиотехника, 2007. – 240с.

12. Основи теорії кіл: підручник для студентів вищих навчальних закладів / Ю. О. Коваль, Л. В. Гринченко, І. О. Милютченко, О. І. Рибін / за заг. редакцією В. М. Шокала та В. І. Правди. – Х.: Компанія СМІТ, 2008. – Ч.1 – 432с.
13. Методичні вказівки до практичних робіт на тему «Розрахунок електричних кіл постійного струму» з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл» / Укладач А.В. Булашенко. - Суми:Вид-во СумДУ, 2010. – 81с.
14. Методичні вказівки до виконання розрахункової роботи з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл» на темою «Розрахунок лінійних електричних кіл в усталених режимах» / Укладач А. В. Булашенко. – Суми: Вид-во СумДУ, 2010. – 87с.
15. Методичні вказівки до виконання курсової роботи з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл» на тему «Розрахунок перехідних процесів у лінійних електричних колах із зосередженими параметрами» / Укладач А. В. Булашенко. – Суми: Вид-во СумДУ, 2008. – 78 с.
16. Теоретичні основи електротехніки: підручник: у 3 т. / за заг. ред. І. М. Чиженка, В. С. Бойко. - К.: ІВЦ «Видавництво «Політехніка», 2004. - Т. 1.: Усталений режим лінійних електричних кіл із зосередженими параметрами. –272с.
17. Теоретичні основи електротехніки: підручник: у 3 т. / за заг. ред. І. М. Чиженка, В. С. Бойко. - К.: ІВЦ «Видавництво «Політехніка», 2008. - Т. 2.: Перехідні процеси у лінійних електричних колах, нелінійнійні кола. –224с.
18. Методичні вказівки до виконання контрольної роботи з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл» на темою «Розрахунок перехідних процесів у лінійних електричних колах із зосередженими параметрами» / Укладач А. В. Булашенко. – Суми: Вид-во СумДУ, 2008. – 86с.
19. Новгородцев А. Б. 30 лекций по теории электрических цепей. – СПб.: Политехника, 1995. – 520с.

20. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл» за темою «Усталені режими у лінійних електричних колах із зосередженими параметрами» / Укладач А. В. Булашенко. – Суми: Вид-во: СумДУ, 2008. – 70с.
21. Методичні вказівки до практичних робіт на тему «Розрахунок електричних кіл несинусоїдального періодичного струму» з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл» / Укладач А.В. Булашенко. - Суми:Вид-во СумДУ, 2010. – 38с.
22. Методичні вказівки до самостійного вивчення теми «Лінійні електричні кола трифазного струму» з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл» / Укладач А.В. Булашенко - Суми:Вид-во СумДУ, 2010. – 64с.
23. Теорія електричних та магнітних кіл: конспект лекцій у 5-ти частинах. – Частина 1: Лінійні електричні кола опстійного та змінного струму / Укладач А.В. Булашенко - Суми:Вид-во СумДУ, 2010. – 177с.
24. Теорія електричних та магнітних кіл: конспект лекцій у 5-ти частинах. – Частина 2: Складні лінійні та нелінійні електричні кола змінного струму / Укладач А.В. Булашенко - Суми:Вид-во СумДУ, 2010. – 175с.
25. Теорія електричних та магнітних кіл: Конспект лекцій у 5-ти частинах. – Частина 3: Перехідні процеси у лінійних електричних колах із зосередженими параметрами / Укладач А.В. Булашенко - Суми:Вид-во СумДУ, 2010. – 212с.
26. Методичні вказівки на до самостійного вивчення теми «Частотний метод та метод змінних стану аналізу перехідних процесів у лінійних електричних колах та моделювання перехідних процесів у Electronics Workbench 5.12» з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл» / Укладач А. В. Булашенко - Суми:Вид-во СумДУ, 2010. – 137с.

ДОДАТОК А

(довідковий)

Розрахунок лінійних електричних кіл постійного струму

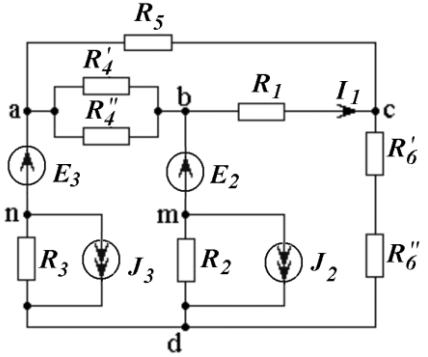


Рисунок А.1

Для схеми, що зображена на рис. А.1 необхідно розрахувати всі струми, якщо задані такі параметри елементів кола

R_1=45 Ом,R_2=60 Ом,R_3=33 Ом, $R_4^{''}$=60 Ом, $R_4^{'}$=20 Ом, R_5=21 Ом, $R_6^{'}$=50 Ом, $R_6^{''}$=25 Ом., E_1=0 В, E_2=52,5 В, E_3=22,5 В J_1= 0 В, J_2= 0,3 В, J_3=0 В.

Розв'язання

А.1 Перетворення загальної схеми за варіантом

Замінимо резистори $R_6^{'}$, $R_6^{''}$ зі схеми, що зображена на рис. А.,1 одним (рис. А.2)

$$R_6 = R_6^{'} + R_6^{''} = 50 + 25 = 75\,Ом$$

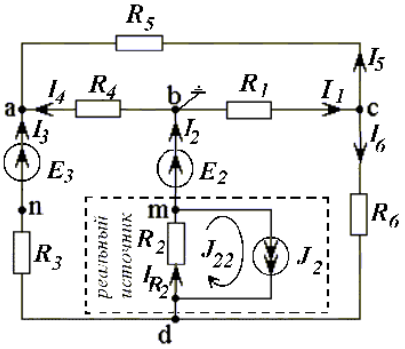


Рисунок А.2

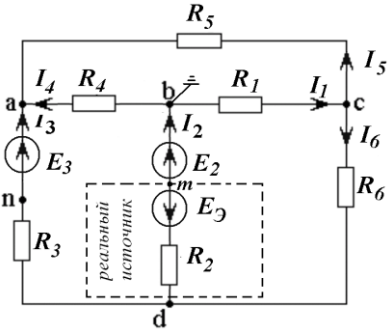


Рисунок А.3

Перетворимо джерело струму зі схеми, що зображена на рис. А.2, на джерело напруги (рис. А.3)

$$E_E = J_2 \cdot R_2 = 18\,\text{В},\ R_4 = \frac{R_4' \cdot R_4''}{R_4' + R''} = \frac{60 \cdot 20}{60 + 20} = 15\,\text{Ом}.$$

Продовження додатка А

А.2 Розрахунки невідомих струмів у гілках за законами Кірхгофа

а) **Для схеми 2:** число гілок-8; число гілок з відомими струмами-1 (гілки з J_2); невідомих струмів у гілках 8-1=7; система повинна містити 7 рівнянь (за кількістю невідомих струмів), число вузлів a,b,c,d,m дорівнює 5, число рівнянь за I законом Кірхгофа повинне бути 5-1=4, оскільки один з вузлів заземлений. У схемі 2, де є гілки без опору bm, потрібно заземлити один з вузлів цієї гілки. Для складання рівнянь за II законом Кірхгофа потрібно 7-4=3 рівняння. Складемо граф схеми (джерела енергії у графі представляємо своїми внутрішніми опорами $R_E = 0, R_J = \infty$, резистори R не зображуються) рис.3.

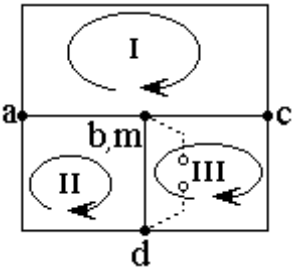


Рисунок А.4 – Ненаправлений граф схеми 2

$$
\begin{array}{ll}
a & I_3 + I_4 + I_5 = 0 \\
c & I_1 = I_5 + I_6 \\
d & I_6 + J_2 = I_{R_2} + I_3 \\
m & I_{R_2} = I_2 + J_2 \\
I & -I_5R_5 - I_1R_1 + I_4R_4 = 0 \\
II & -I_4R_4 - I_{R_2}R_2 + I_3R_3 = -E_2 + E_3 \\
III & I_1R_1 + I_6R_6 + I_{R_2}R_2 = E_2
\end{array}
$$

Рівняння за II законом Кірхгофа складаються для гнізд графа. Напрямок обходу контурів можна вибирати довільно. Розв'язуючи систему, знаходимо невідомі струми $I_1, I_2, I_{R_2}, I_3, I_4, I_5, I_6$ (за завданням розв'язувати систему не потрібно).

б) **Для схеми 3**: Число невідомих струмів - 6, число вузлів – 4, число рівнянь за I законом Кірхгофа 4-1=3, число рівнянь за II законом Кірхгофа 6-3=3. Контури та напрямки обходу вибираємо за графом схеми (рис.А.5).

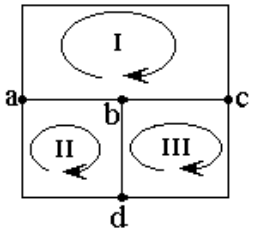


Рисунок А.5

$$
\begin{array}{ll}
a & \left\{ I_3 + I_4 + I_5 = 0 \right. \\
c & \left\{ I_1 = I_5 + I_6 \right. \\
d & \left\{ I_6 = I_2 + I_3 \right. \\
I & \left\{ -I_5R_5 - I_1R_1 + I_4R_4 = 0 \right. \\
II & \left\{ -I_4R_4 - I_2R_2 + I_3R_3 = -E_2 + E_э + E_3 \right. \\
III & \left\{ I_1R_1 + I_6R_6 + I_2R_2 = -E_э + E_2 \right.
\end{array}
$$

Розв'язуючи систему, знаходимо струми I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 (за завданням, розв'язувати систему не потрібно).

А.3 Розрахунки невідомих струмів у гілках МКС

Число рівнянь системи МКС дорівнює числу рівнянь за II законом Кірхгофа. У контурах I, II, III проходять *невідомі контурні струми* I_{11}, I_{22}, I_{33}, які і *є невідомими системами*. У гілці із джерелом струму проходить *відомий* струм J_2, який створює у контурі відомий контурний струм $J_{22}=J_2=0{,}3$ *А* (схема 2) рис. А.2.

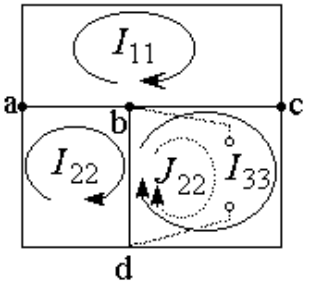


Рисунок А.2

Складемо систему рівнянь за методом контурних струмів

$$
\begin{cases}
I_{11}(R_5 + R_1 + R_4) - I_{22}R_4 - I_{33}R_1 = 0, \\
-I_{11}R_4 + I_{22}(R_4 + R_2 + R_3) - I_{33}R_2 - J_{22}R_2 = -E_2 + E_3, \\
-I_{11}R_1 - I_{22}R_2 + I_{33}(R_1 + R_6 + R_2) + J_{22}R_2 = E_2,
\end{cases}
$$

або перенесемо $J_{22}R_2 = J_2R_2 = E_E$ у праву частину

$$
\begin{cases}
I_{11}(R_5 + R_1 + R_4) - I_{22}R_4 - I_{33}R_1 = 0, \\
-I_{11}R_4 + I_{22}(R_4 + R_2 + R_3) - I_{33}R_2 = -E_2 + E_3 + E_E, \\
-I_{11}R_1 - I_{22}R_2 + I_{33}(R_1 + R_6 + R_2) = E_2 - E_E,
\end{cases}
$$

У такому вигляді система відповідає схемі 3. Запишемо систему у матричній формі.

$$\begin{bmatrix} R_5+R_1+R_4 & -R_4 & -R_1 \\ -R_4 & R_4+R_2+R_3 & -R_2 \\ -R_1 & -R_2 & R_1+R_2+R_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ -E_2+E_3+E_E \\ E_2-E_E \end{bmatrix}.$$

Матриця у числах:

$$\begin{bmatrix} 81 & -15 & -45 \\ -15 & 108 & -60 \\ -45 & -60 & 180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ -12 \\ 34.5 \end{bmatrix}.$$

Розв'язуючи систему щодо невідомих, знаходимо контурні струми $I_{11} = 0.142$ А, $I_{22} = 0.042$ А, $I_{33} = 0.241$А, а тоді за принципом накладення виражаємо через них струми у гілках. Якщо контурний струм проходить згідно із прийнятим напрямком струму, то він береться зі знаком плюс і навпаки

$$I_1 = I_{33} - I_{11} = 0.099\text{А},\ I_2 = I_{33} - I_{22} = 0.198\text{А},$$

$$I_3 = I_{22} = 0.042\text{А},\ I_4 = I_{11} - I_{22} = 0.099\ \text{А},\ I_5 = -I_{11} = -0.142\text{А},$$

$$I_6 = I_{33} = 0.241\text{А},\ I_{R2} = I_{33} - I_{22} + J_2 = 0.498\text{А}.$$

А.4 Розрахунки невідомих струмів у гілках МВП

Число рівнянь системи дорівнює числу рівнянь за І законом Кірхгофа. *Невідомими системи є невідомі потенціали вузлів.* Потенціал одного з вузлів беремо таким, що дорівнює 0. У схемі, де є гілки, що містить тільки *E*, потрібно вибирати за нуль потенціал одного з вузлів цієї гілки.

Для схеми 2: $\varphi_b = 0$, $\varphi_m = \varphi_b - E_2 = -52.5B$ невідомими будуть φ_a, φ_c і φ_d.

Запишемо систему для МВП

$$\begin{cases} \varphi_a\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)-\varphi_c\frac{1}{R_5}-\varphi_d\frac{1}{R_3}=\frac{E_3}{R_3}, \\ -\varphi_a\frac{1}{R_5}-\varphi_c\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_5}\right)-\varphi_d\frac{1}{R_6}=0, \\ \varphi_a\frac{1}{R_3}-\varphi_m\frac{1}{R_2}-\varphi_c\frac{1}{R_6}+\varphi_d\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_6}\right)=J_2-\frac{E_3}{R_3}. \end{cases}$$

Для схеми 3:

$$\begin{cases} \varphi_a\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)-\varphi_c\frac{1}{R_5}-\varphi_d\frac{1}{R_3}=\frac{E_3}{R_3}, \\ \varphi_a\frac{1}{R_5}+\varphi_c\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_5}\right)+\varphi_d\frac{1}{R_6}=0, \\ -\varphi_a\frac{1}{R_3}-\varphi_c\frac{1}{R_6}+\varphi_d\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_6}\right)=\frac{E_E-E_2}{R_2}-\frac{E_3}{R_3}. \end{cases}$$

Системи еквівалентні, тому що $\frac{E_E-E_2}{R_2}=\frac{E_E}{R_2}-\frac{E_2}{R_2}=J_2-\frac{E_2}{R_2}$.

Система в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right) & -\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_5} & \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_5}\right) & -\frac{1}{R_6} \\ -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_6} & \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_6}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_c \\ \varphi_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_3}{R_3} \\ 0 \\ J_2-\frac{E_2}{R_2}-\frac{E_3}{R_3} \end{bmatrix}.$$

Розв’язуючи систему щодо невідомих, знаходимо невідомі потенціали вузлів:

$$\varphi_a = -1{,}489\ В \quad \varphi_c = -4{,}472\ В \quad \varphi_d = -22{,}579\ В.$$

Виражаємо струми у гілках за законом Ома

$$I_1 = \frac{\varphi_b - \varphi_c}{R_1} = 0.099\,\text{А},\ I_4 = \frac{\varphi_b - \varphi_a}{R_4} = 0.099\,\text{А},$$

$$I_6 = \frac{\varphi_c - \varphi_d}{R_6} = 0.241\,\text{А},\ I_3 = \frac{\varphi_d - \varphi_a + E_3}{R_3} = 0.042\,\text{А},$$

$$I_5 = \frac{\varphi_c - \varphi_a}{R_5} = -0.142\,\text{А}.$$

За схемою 2: $I_{R2} = \frac{\varphi_d - \varphi_m}{R_2} = \frac{\varphi_d - (-E_2)}{R_2} = 0.498\,\text{А},$

$$I_2 = I_{R2} - J_2 = 0.198\,\text{А}.$$

За схемою 3: $I_2 = \frac{\varphi_d - \varphi_b + E_2 - E_E}{R_4} = 0.198\,\text{А}.$

А.5 Порівняльна таблиця результатів розрахунків струмів

	I_1, А	I_2, А	I_{R2}, А	I_3, А	I_4, А	I_5, А	I_6, А
МКС	0,099	0,198	0,498	0,042	0,099	-0,142	0,241
МВП	0,099	0,198	0,498	0,042	0,099	-0,142	0,241

А.6 Баланс потужностей

Перевіримо виконання балансу потужності у схемі 2, розраховуючи потужності споживачів та джерел.

Розрахуємо напругу

$$U_{dm} = I_{R2} R_2 = 29.92\,\text{В}.$$

Потужність споживачів

$$P_R = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 = 20.36\,\text{Вт}.$$

Потужність джерел

$$P_E = E_2 I_2 + E_3 I_3 + J_2 U_{dm} = 20.36\,\text{Вт}.$$

Оскільки потужність споживачів та джерел однакові, отже баланс потужності сходиться.

А.7 Розрахунки I1 для схеми 2 МЕГ

Візьмемо $R_1 = \infty$, тобто розглянемо схему 3 у режимі ХХ. Одержимо схему рис. А.7, відповідну до еквівалентного генератора. Це нова схема 4, у якій вибираємо напрямки нових струмів $I_{a\,xx}, I_{b\,xx}, I_{c\,xx}, I_{dxx}$. У ній три вузли a, m, d. Виходить, МВП відповідає система 2 рівнянь. МКТ також відповідає система 2 рівнянь (див. рис. 8.А), оскільки у схемі 2 контуру з невідомими контурними струмами I_{11xx} та I_{22xx}.

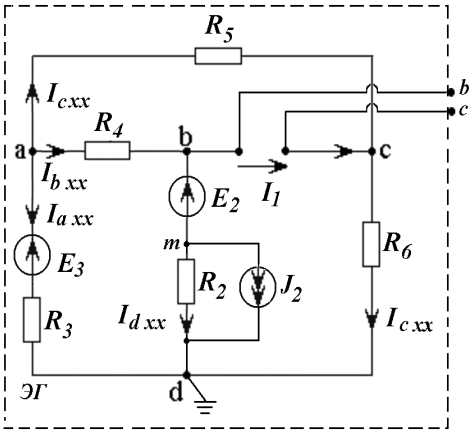


Рисунок А.7 – Контурні струми у схемі 2

Схемі 3 буде відповідати система: МКТ – 2 рівняння, МУП – 1 рівняння). Гілки з J_2 створює відомий контурний струм $J_{22}=J_2$.

а) Система МУП: візьмемо $\varphi_d = 0$ (рис.А.8).

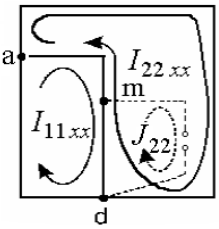


Рисунок А.8 – Граф схеми для МКТ

Складемо систему рівняннь за МВП

$$\begin{cases} \varphi_{a.xx}\left(\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_5+R_6}\right)-\varphi_{m.xx}\dfrac{1}{R_4}=\dfrac{E_3}{R_3}+\dfrac{E_2}{R_4}, \\ -\varphi_{a.xx}\dfrac{1}{R_4}-\varphi_{m.xx}\left(\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{\infty}\right)=-\dfrac{E_2}{R_4}-J_2. \end{cases}$$

Матриця в числах

$$\begin{bmatrix} 0.107 & -0.067 \\ -0.067 & 0.083 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{a.xx} \\ \varphi_{m.xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.182 \\ -3.8 \end{bmatrix}.$$

З системи знаходимо такі значення потенціалів

$\varphi_{\text{a.xx}} = 21.12\,\text{В},\ \varphi_{\text{m.xx}} = -28.7\,\text{В}.$

Через значення знайдених потенціалів знаходимо значення струмів

$$I_{a.xx} = \frac{\varphi_{a.xx} - 0 - E_3}{R_3} = -0.041\,\text{А}, I_{b.xx} = \frac{\varphi_{a.xx} - \varphi_{m.xx} - E_2}{R_4} = -0.178\,\text{А},$$

$$I_{c.xx} = \frac{\varphi_{a.xx} - 0}{R_5 + R_6} = 0.22\,\text{А},\ I_{d.xx} = I_{b.xx} - J_2 = -0.478\text{А}.$$

б) Система МКС (рис. А.8):

$$\begin{cases} I_{11.xx}(R_4 + R_2 + R_3) - I_{22.xx}(R_4 + R_2 + R_3) - J_2 R_2 = E_3 - E_2, \\ -I_{11.xx}(R_4 + R_2) + I_{22.xx}(R_4 + R_2 + R_5 + R_6) + J_2 R_2 = E_2. \end{cases}$$

Перенесемо в праву частину рівняння в цифрах J_2R_2 і складемо матричні рівняння

$$\begin{bmatrix} 108 & -75 \\ -75 & 171 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11.xx} \\ I_{22.xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 34.5 \end{bmatrix}.$$

Знайдемо струми

$$I_{11.xx} = 0.041\text{В},\ I_{22.xx} = 0.22\text{В}.$$

Виражаємо струми у гілках через контурні

$$I_{a.xx} = -I_{11.xx} = -0.041\text{А},\ I_{b.xx} = I_{11.xx} - I_{22.xx} = -0.178\text{А},$$

$$I_{c.xx} = I_{22.xx} = 0.22\,\text{А},\ I_{d.xx} = I_{11.xx} - I_{22.xx} - J_2 = -0.478\text{А}.$$

в) Прирівняємо струми у гілках, отримані МВП і МКС.

г) Знаходимо $U_{bc\,xx}$ (тому що струм $I_1 = I_{bc}$ у схемах 2 і 3). Розраховуємо його за 2 різними шляхами, роблячи перехід від другої точки «с» до першої «b». Зміну потенціалів на елементах враховуємо за законом Ома (рис. А.7).

Візьмемо $\varphi_{c\,xx} = 0$, тоді

$$U_{bc\,xx} = \varphi_{b\,xx} - \varphi_{c\,xx} = -I_{c\,xx}R_6 + I_{d\,xx}R_2 + E_2 = I_{c\,xx}R_5 - I_{b\,xx}R_4$$

7,296 В =7,296 В.

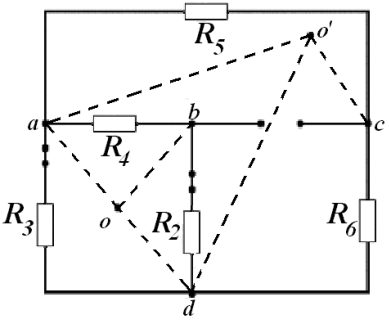


Рисунок А.9

д) Визначимо вхідний опір схеми $R_{bc\,xx}$. Видаляємо джерела енергії, залишаючи замість джерела ЕРС. $R_E = 0$, і $R_J = \infty$ (обрив), замість J. У схемі рис. А.9 не можна виділити паралельні та послідовні ділянки, тому робимо перетворення трикутника *abd* у зірку (або *acd*).

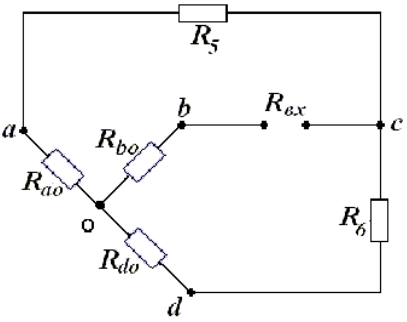


Рисунок А.10

Розрахуємо опори для такого перетворення:

$$R_{ao} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4 + R_2} = 4.583\ \text{Ом},$$

$$R_{do} = \frac{R_3 R_2}{R_3 + R_4 + R_2} = 18.333\ \text{Ом},$$

$$R_{bo} = \frac{R_2 R_4}{R_3 + R_4 + R_2} = 8.333\ \text{Ом}.$$

Запишемо вираз для вхідного опора

$$R_{вх\,bc\,xx} = R_{bo} + \frac{(R_{ao} + R_5)(R_{do} + R_6)}{(R_{ao} + R_5) + (R_{do} + R_6)},\ R_{вх\,bc\,xx} = 28.412\ \text{Ом}$$

(порівнюємо результати, отримані для Δ *abd* і *acd*).

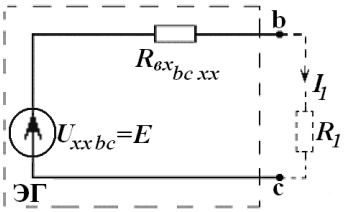


Рисунок А.11 - Схема заміщення для розрахунків I_1 МЕГ

$$R_{вх_{bc\,xx}} = R_{bo} + \frac{(R_{ao} + R_5)(R_{do} + R_6)}{(R_{ao} + R_5) + (R_{do} + R_6)},$$

$R_{вх_{bc\,xx}}$ =28.412 Ом.

(порівнюємо результати, отримані для Δ *abd* і *acd*).

е) Визначаємо струм I_1 згідно зі схмою заміщення (*рис. А.11)*

Порівняємо I_1 з таблицею (пункт 5).

А.8 Потенційна діаграма

Для схеми 2: розглянемо контур a,b,m,d,a і розрахуємо потенціали кожної з точко φ

1) $\varphi_b = 0$ В; 2) $\varphi_m = \varphi_2 - E_2 = -52.5$ В;

3) $\varphi_d = \varphi_m + I_{R2}R_2 = -22.58$ В; 4) $\varphi_n = \varphi_d - I_3R_3 = -23.98$ В;

5) $\varphi_a = \varphi_n + E_3 = -1.48$В; 6) $\varphi_b = \varphi_a + I_4R_4 = 0$ В.

Згідно з розрахунками побудуємо потенційну іаграму (рис. А.12).

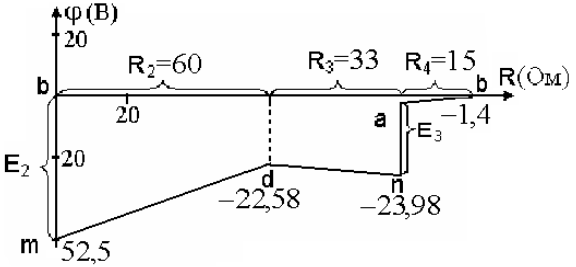


Рисунок А.12 – Потенційна діаграма

ДОДАТОК Б

(довідковий)

Розрахунок лінійного електричні кола синусоїдального струму

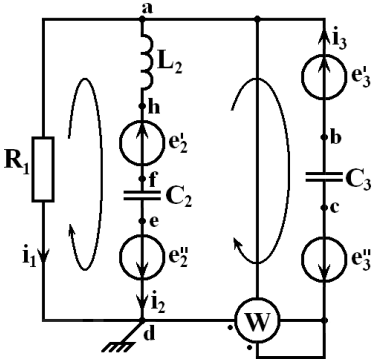


Рисунок Б.1 – Схема у системі оригіналів

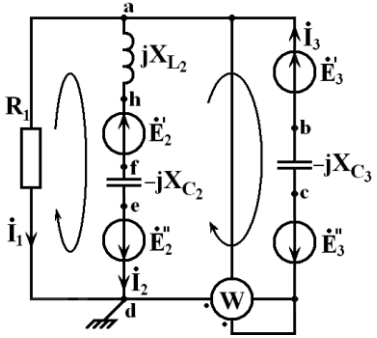


Рисунок Б.2 – Схема у системі символічних зображенньі

Дано:

$R_1 = 60\ Ом$

$L_2 = 2\ мГн = 2 \cdot 10^{-3}\ Гн$

$C_2 = 8\ мкФ = 8 \cdot 10^{-6}\ Ф$

$C_3 = 1{,}25\ мкФ = 1{,}25 \cdot 10^{-6}\ Ф$

$f = 2000\ Гц$

$e_2' = 282\cos(\omega t + 296^\circ) =$

$= 282\sin(\omega t + 296^\circ + 90^\circ) =$

$282\sin(\omega t + 26^\circ)\ B$

$e_2'' = 141\sin(\omega t + 60^\circ)\ B$

$e_3' = 70\sin(\omega t + 30^\circ)\ B$

$e_3'' = 199\cos\omega t = 199\sin(\omega t + 90^\circ)\ B$

Розв'язання

Б.1 Система рівнянь за законами Кірхгофа

а) **у системі оригіналів** (рис. Б.1), тобто у інтегрально-диференційній формі. Стрілкою вказаний напрям обходу контурів

$$\begin{cases} i_1 + i_2 = i_3, \\ -\underbrace{i_1 \cdot R_1}_{I\ гілка} + \underbrace{\left(L_2 \cdot \dfrac{di_2}{dt} + \dfrac{1}{C_2} \int i_2 \cdot dt \right)}_{II\ гілка} = -e_2' + e_2'', \\ -\overbrace{\left(L_2 \cdot \dfrac{di_2}{dt} + \dfrac{1}{C_2} \int i_2 \cdot dt \right)}^{II\ гілка} - \overbrace{\left(\dfrac{1}{C_3} \int i_3 \cdot dt \right)}^{III\ гілка} = -e_2'' + e_2' - e_3' + e_3''. \end{cases}$$

б) **у системі символьних зображень** (рис. Б.2), тобто у комплексній формі.

При переході у систему зображень операції диференціювання замінюються множенням на оператор $j\omega$, операції інтегрування діленням на оператор $j\omega$, завдяки чому система стає алгебраїчною, як у постійному струмі, що дозволяє у подальшому застосувати для розрахунку струмів всі методи розрахуннку кіл постійного струму.

Врахуємо, що $\frac{1}{j} = \frac{1}{e^{j90°}} = e^{-j90°} = -j$.

$$\begin{cases} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_3, \\ -\underbrace{(\dot{I}_1 R_1)}_{\text{I гілка}} + \underbrace{\left(\overbrace{L_2 j\omega \dot{I}_2}^{jX_{L_2}} + \overbrace{\frac{1}{C_2}\frac{1}{j\omega}\dot{I}_2}^{-jX_{C_2}} \right)}_{\text{II гілка}} = -\dot{E}_2' + \dot{E}_2'', \\ -\underbrace{\left(L_2 j\omega \dot{I}_2 + \frac{1}{C_2}\frac{1}{j\omega}\dot{I}_2 \right)}_{\text{II гілка}} - \underbrace{\left(\frac{1}{C_3}\frac{1}{j\omega}\dot{I}_3 \right)}_{\text{III гілка}} = -\dot{E}_2'' + \dot{E}_2' - \dot{E}_3' + \dot{E}''. \end{cases}$$

З урахуванням позначень спростимо систему рівняннь

$$\begin{cases} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_3, \\ -\underbrace{\dot{I}_1 R_1}_{\text{I гілка}} + \underbrace{\dot{I}_2 (jX_{L_2} - jX_{C_2})}_{\text{II гілка}} = -\dot{E}_2' + \dot{E}_2'', \\ -\underbrace{\dot{I}_2 (jX_{L_2} - jX_{C_2})}_{\text{II гілка}} + \underbrace{\dot{I}_3 (-jX_{C_3})}_{\text{III гілка}} = -\dot{E}_2'' + \dot{E}_2' - \dot{E}_3' + \dot{E}''. \end{cases}$$

Продовження додатка Б

Б.2 Розрахунок струмів у системі зображенн

Значення комплексних опорів: $R_1 = Z_1 = 60$ Ом,

$$Z_{C2} = -jX_{C2} = -j\frac{1}{\omega C_2} = -j\frac{1}{2\pi f C_2} =$$

$$= -j\frac{1}{2\pi \cdot 2000 \cdot 8 \cdot 10^{-6}} = -j9.95 \text{ Ом},$$

$$Z_{C3} = -jX_{C3} = -j\frac{1}{\omega C_3} = -j\frac{1}{2\pi f C_3} =$$

$$= -j\frac{1}{2\pi \cdot 2000 \cdot 1.25 \cdot 10^{-6}} = -j63.69 \text{ Ом},$$

$$Z_{L2} = jX_{L2} = j\omega L_2 = j2\pi f L_2 = -j2\pi \cdot 2000 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = j25.12 \text{Ом},$$

$$Z_2 = jX_{L2} - jX_{C2} = j(25.12 - 9.95) = j15.17 \text{Ом},$$

$$Z_3 = -jX_{C3} - j63.69 \text{Ом}.$$

Для розрахунку U_{ab} використаємо метод 2-х вузлів, як найбільш раціональний. Для полегшення розрахунків замість комплексних опорів гілок Z_1, Z_2, Z_3 введемо комплексну провідність Y_1, Y_2, Y_3.

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{60} = 0.0171/\text{Ом},$$

$$Y_2 = \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{j15.17} = -j0.0661/\text{Ом},$$

$$Y_3 = \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{-j63.69} = j0.01571/\text{Ом}.$$

Розрахуємо значення напруг джерел напруг

$$\dot{E}_2' = \frac{282}{\sqrt{2}} e^{j26^\circ} = 200e^{j26^\circ} = 180 + j88\text{В},$$

$$\dot{E}_2'' = \frac{141}{\sqrt{2}} e^{j60^\circ} = 100e^{j60^\circ} = 50 + j87\text{В},$$

$$\dot{E}_3' = \frac{70}{\sqrt{2}} e^{j30^\circ} = 50e^{j30^\circ} = 43.3 + j25\text{В},$$

$$\dot{E}_3'' = \frac{199}{\sqrt{2}} e^{j90^\circ} = 141e^{j90^\circ} = j141\text{В}.$$

Продовження додатка Б

Розрахуємо напругу

$$\dot{U}_{ad} = \dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_d = \dot{\varphi}_a = \frac{(\dot{E}_2' - \dot{E}_2'')Y_2 + (\dot{E}_3' - \dot{E}_3'')Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} =$$

$$= 153.25 - j13.94 = 153.88e^{j355^\circ} = 153.88e^{-j5^\circ}$$

Розрахуємо струми у гілках

$$\dot{I}_1 = (\dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_d) \cdot \dot{Y}_1 = (153.55 - j13.69) \cdot 0.017 =$$

$$= 2.61 - j0.24 = 2.62e^{-j5^\circ} \text{ A},$$

$$\dot{I}_2 = (\dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_d - \dot{E}_2' + \dot{E}_2'') \cdot \dot{Y}_2 = (153.55 - j13.69 + 49 + j86 - 179 -$$

$$- j87) \cdot (-0.066j) = -0.99 - j1.53 = 1.83e^{j238^\circ 50'} = 1.83e^{-j121^\circ 50'} A,$$

$$\dot{I}_3 = (\dot{\varphi}_d - \dot{\varphi}_a + \dot{E}_3' - \dot{E}_3'') \cdot \dot{Y}_3 = (-153.55 + j13.69 - j141 + 42 +$$

$$+ j24) \cdot (0.016j) = 1.60 - j1.73 = 2.37e^{-j46^\circ} A.$$

Виконаємо перевірку струмів за 1-м законом Кірхгофа

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_3$$

(припустима похибка не більше 5% від мінімального значення величини).

Для дійсних частин
2,61-0,99≈1,60.

Для уявних частин
-0,24-1,53≈-1,73.

Б.3 Визначити покази ваттметра

Запишемо значення струмів та напруг для розрахунку потужності

$$\dot{I}_3 = 2.37e^{-j46^\circ} \text{ А}, \ \dot{I}_3^* = 2.37e^{j46^\circ} \text{ А}, \ \dot{U}_{da} = -\dot{U}_{da} = 153.25e^{j175^\circ} \text{ В}.$$

Запишемо значення комплексної потужності

$$\tilde{S} = \dot{U}_{da} I_3^* = 154.16e^{j175^\circ} \cdot 2.42e^{j47^\circ 20'} = 373.06e^{j222.2^\circ} =$$

$$= -275.24 - 239.26j = P + jQ$$

Активна потужність $P = -275.24$ Вт. Розрахуємо активну потужність

$$P = U_{da} I_3 \cos(\varphi_U - \varphi_I) = 154.16 \cdot 2.42 \cos[175^\circ - (-47.2^\circ)] =$$

$$= 373.06 \cdot \cos(-137.4^\circ) = -275.79 \text{ Вт}.$$

Б.4 Топографічна діаграма

Для побудови топографічної діаграми розраховуємо потенціали всіх точок схеми, рухаючись по I, II та III гілках від точки $\dot{\varphi}_d = 0$ до точки *a* (рис. Б.2).

I гілка

$$\dot{\varphi}_a = \dot{I}_1 R_1 = (2.61 - j0.23) \cdot 60 = 156.6 - j14.4 = 157.26 e^{-j5^\circ} \text{ В}.$$

Вектор струму та напруги збігається за фазою (ділянка a-d).

II гілка: $\dot{\varphi}_e = \dot{\varphi}_d - E_2'' = 0 - 50 - j87 = 100 e^{j240^\circ}$ В,

$$\dot{\varphi}_f = \dot{\varphi}_e + \dot{I}_2(-jX_{C2}) = 50 + j87 + (-0.97 - j1.55)(-j9.95) =$$

$$= -65.2 - j87 = 101 e^{j230^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{\varphi}_h = \dot{\varphi}_f + E_2' = -65.2 - j87 + 180 + j88 = 115.3 e^{j5^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{\varphi}_a = \dot{\varphi}_h + \dot{I}_2(jX_{L2}) = 114.8 + j10.3 + (-0.99 - j1.53)(j25.12) =$$

$$= 153.53 - j14.5 = 153.68 e^{j355^\circ} \text{ В},$$

III гілка: $\dot{\varphi}_c = \dot{\varphi}_d - \dot{E}_3'' = 0 - j141 = 141 e^{j90^\circ}$ В,

$$\dot{\varphi}_b = \dot{\varphi}_c - \dot{I}_3(-jX_{C3}) = -j141 - (1.60 - j1.73)(-j63.69) =$$

$$= 110.18 - j39.1 = 116.91 e^{-j20^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{\varphi}_a = \dot{\varphi}_b - \dot{E}_3' = 110.18 - j39.1 + 43.3 + j25 =$$

$$= -153.18 - j14.1 = 153.83 e^{-j5^\circ} \text{ В}.$$

Розкид значень потенціалу $\dot{\varphi}_a$, отриманого трьома різними шляхами та методом 2-х вузлів, не перевищує 5% від мінімального значення $\dot{\varphi}_a$, що служить критерієм правильності розрахунків.

Будуємо топографічну діаграму, сполучену з діаграмою струмів. Побудова потенціалів точок і векторів струмів виконуємо кожний у своєму масштабі: 1 розподіл відповідає 0.5 А та 20В. Спочатку будуємо вектор струму. Кінець кожного вектора визначають дві координати. Потім будуємо за координатами точки φ, одночасно перевіряємо правильність розташування векторів $\dot{U}$ відносно $\dot{I}$ для елементів R, L, C.

Продовження додатка Б

При перевірці положення вектора $\dot{E}$ початок координат подумки переміщаємо у початок цього вектора.

Взаємне розташування кожної пари вектора напруги та струму для кожного з елементів R, L і C повинне відповідати діаграмі, наведеної на рис. Б.3.

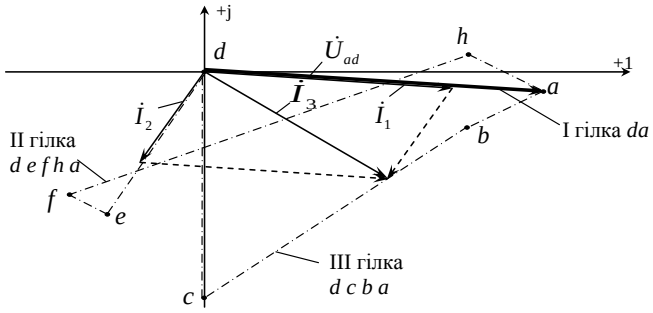


Рисунок Б.3 – Топографічна діаграма

На рис. А.15 різними пунктирами вказані послідовності розташування точок для кожної із трьох гілок при русі від загального вузла d до загального вузла a. Положення вектора $\dot{U}_{ad}$ також необхідно порівняти з його розрахованим значенням у пункті 2 та звернути увагу, що на діаграмі $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_3$.

Б.5 Значення струмів i_1, i_2, i_3 та їх графіки

Розрахуємо значення струмів у гілках 1, 2 та 3 у комплексній формі та часовій

а) $\dot{I}_1 = 2{,}62e^{j355^\circ} = 2{,}62e^{-j5^\circ}A$, $\dot{I}_{1m} = 2{,}62\sqrt{2}e^{-j5^\circ} = 3{,}71e^{-j5^\circ}A$,

$i_1 = 3{,}71\sin(\omega t - 5^\circ)A$;

б) $\dot{I}_2 = 1{,}83e^{-j138^\circ 50'}A$, $\dot{I}_{2m} = 1{,}83\sqrt{2}e^{-j138^\circ 50'} = 2{,}59e^{-j138^\circ 50'}A$,

$i_2 = 2{,}59\sin(\omega t + 212^\circ) = 2{,}59\sin(\omega t - 148^\circ)A$;

в) $\dot{I}_3 = 2{,}46e^{j47^\circ 20'}A$, $\dot{I}_{3m} = 2{,}46\sqrt{2}e^{j47^\circ 20'} = 3{,}48e^{j47^\circ 20'}A$,

$i_3 = 3{,}48\sin(\omega t + 47^\circ 20')\ A$.

Побудуємо графіки струмів (рис. Б.4).

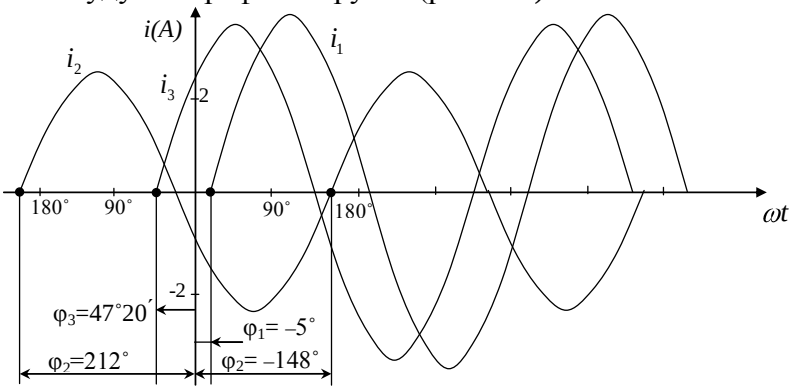
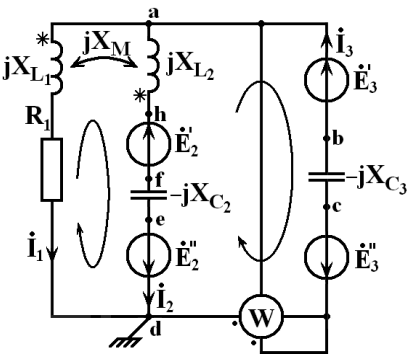


Рисунок Б.4 – Графік струмів у системі оригіналів

Б.8 Система МЗК для схеми з двома магнітно-зв'язаними котушками

Оскільки у заданій схемі лише одна котушка, додатково введемо в одну з гілок, що не містять L, другу котушку та позначимо включення котушок як узгоджене або зустрічне. При узгодженому включенні струм у обох котушках спрямований однаково відносно початку обмоток, позначених зірочками. При зустрічному (див. рис. Б.5) він спрямований по-різному.



Рисуно Б.5 – Схема у системі символьних зображенн

а) Запишемо систему рівнянь за законами Кірхгофа у системі оригіналів, тобто у інтегрально-диференціальній формі для зустрічного ввімкнення котушок:

Продовження додатка Б

$$\begin{cases} i_1 + i_2 = i_3, \\ -\underbrace{\left[i_1 R_1 + \underbrace{\left(L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \right)}_{U_I \text{ котушки}} \right]}_{\text{гілка I}} + \underbrace{\left[\frac{1}{C_2} \int i_2 dt + \underbrace{\left(L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \right)}_{U_{II} \text{ котушки}} \right]}_{\text{гілка II}} = -e_2' + e_2'', \\ -\underbrace{\left[\frac{1}{C_2} \int i_2 dt + \underbrace{\left(L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \right)}_{U_{II} \text{ катушки}} \right]}_{\text{гілкаь II}} - \underbrace{\left[\frac{1}{C_3} \int i_3 dt \right]}_{\text{гілкаIII}} = -e_2'' + e_2' - e_3' + e_3''. \end{cases}$$

б) Система рівнянь у системі символічних зображеннь, тобто у комплексній формі

$$\begin{cases} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_3, \\ \underbrace{-\dot{I}_1 R_1 + \underbrace{(L_1 j\omega \dot{I}_1 - Mj\omega \dot{I}_2)}_{\dot{U}_I \text{ котушки}}}_{\text{гілка I}} + \underbrace{\frac{1}{C_1} \frac{1}{j\omega} \dot{I}_2 + \underbrace{(L_2 j\omega \dot{I}_2 - Mj\omega \dot{I}_1)}_{\dot{U}_{II} \text{ котушки}}}_{\text{гілка II}} = -\dot{E}_2' + \dot{E}_2'', \\ \underbrace{-\frac{1}{C_1} \frac{1}{j\omega} \dot{I}_2 + \underbrace{(L_2 j\omega \dot{I}_2 - Mj\omega \dot{I}_1)}_{\dot{U}_{II} \text{ катушки}}}_{\text{гілка II}} \underbrace{- \frac{1}{C_3} \frac{1}{j\omega} \dot{I}_3}_{\text{гілка III}} = -\dot{E}_2'' + \dot{E}_2' - \dot{E}_3' + \dot{E}_3''. \end{cases}$$

$Mj\omega = j\omega M = jX_M$ – комплексний опір взаємоіндукції; $jX_L = j\omega L$ – комплексний індуктивний опір; $-jX_C = \frac{1}{j\omega c} = -j\frac{1}{\omega c}$ – комплексний ємнісний опір.

Перепишемо спрощену систему рівнянь

$$\begin{cases} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_3, \\ -\left[\dot{I}_1 R_1 + jX_{L_1} \dot{I}_1 - jX_M \dot{I}_2 \right] + \left[\dot{I}_2 jX_{L_2} - jX_{C_2} \dot{I}_2 - jX_M \dot{I}_1 \right] = -\dot{E}_2' + \dot{E}_2'', \\ -\left[\dot{I}_2 jX_{L_2} - jX_{C_2} \dot{I}_2 - jX_M \dot{I}_1 \right] + \left[\dot{I}_3 (-jX_{C_3}) \right] = -\dot{E}_2'' + \dot{E}_2' - \dot{E}_3' + \dot{E}''. \end{cases}$$

Навчальне видання

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ КІЛ

Конспект лекцій
для студентів напряму підготовки 050201 «Системна інженерія»
спеціальності 6.091401 «Системи управління та автоматики»
заочної форми навчання
У п’яти частинах
Частина 4

Відповідальний за випуск Г. М. Худолей
Редактор Н. М. Мажуга
Комп’ютерне верстання А. В. Булашенка

Підп. до друку 07.07.2010, поз.
Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. 10,7. Обл.-вид. арк. 9,86. Тираж: 50 пр. Зам №
Собівартість видання грн к.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет
Шосткинський інститут

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ КІЛ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

У п’яти частинах
Частина 4

Суми
Видавництво СумДУ
2010

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет
Шосткинський інститут

До друку та в світ
дозволяю на підставі
«Єдиних правил», п.2.6.14
Заступник першого проректора –
начальник організаційно-методичного
управління В.Б. Юскаєв

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ КІЛ

Конспект лекцій
для студентів напряку підготовки 050201 «Системна інженерія»
спеціальності 6.091401 «Системи управління та автоматики»
заочної форм навчання
У п’яти частинах
Частина 4

Усі цитати, цифровий
та практичний матеріал,
бібліографічні
відомості перевірені,
написання одиниць
відповідає стандартам

Укладач А.В. Булашенко

Відповідальний за випуск Г.М. Худолей

Директор Шосткинського інституту В.Л. Акуленко