Тема 13. Диференціювання функцій: складної, заданої неявно та параметрично

Теоретичні відомості

Нехай $y = f[u(x)] -$ *складна функція*, тобто $y = f(u)$, де $u = u(x)$. Тут $u -$ проміжний аргумент, $x -$ незалежна змінні. Тоді $y' = f'(u)u'(x)$.

Правило. Похідна складеної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції $f(u)$ по проміжному аргументу u і похідної внутрішньої функції $u(x)$ по незалежній змінній x.

Якщо кожному числу x множини X ставиться у відповідність єдине число y так, що пара чисел $(x; y)$ задовольняє рівняння $F(x, y) = 0$, то кажуть, що функцію $y = f(x)$, $x \epsilon X$, *задано неявно.*

Незважаючи на те, що рівняння $F(x, y) = 0$ не розв'язане відносно y, можна знайти похідну $y' = y'(x)$. Для цього потрібно:

1. обидві частини рівняння $F(x, y) = 0$ продиференціювати по x, вважаючи, що y є функцією від x;

2. одержане рівняння розв'язати відносно y'.

Нехай функція $y = f(x)$ задана *параметрично*

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \omega(t)' \end{cases} \qquad t - \text{параметр}.$$

Її похідна обчислюється

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Знайти похідну складеної функції $y = \sqrt{x^2 + 5}$.

Розв'язання. Поклавши $u = x^2 + 5$, маємо $y = \sqrt{u}$. Тому

$$y' = \left(\sqrt{u}\right)' u' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 5}} (x^2 + 5)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 5}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}.$$

Можна було б відразу продиференціювати функцію, не вводячи проміжний аргумент:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+5}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}.$$

Приклад 2. Знайти похідну складеної функції $y = (5x^2 + 7x + 2)^3$.

Розв'язання. Поклавши $u = 5x^2 + 7x + 2$, одержимо $y = u^3$. Надалі будемо писати так: $y = u^3, u = 5x^2 + 7x + 2$.

$$y' = (u^3)' \cdot u' = 3(5x^2 + 7x + 2)^2(5x^2 + 7x + 2)'$$
$$= 3(5x^2 + 7x + 2)^2(10x + 7).$$

Приклад 3. Знайти похідну складеної функції $y = \sin 15x$.

Розв'язання. $y = \sin u,\ u = 15x$.

$$y' = (\sin u)' \cdot u' = \cos u \cdot u' = \cos 15x(15x)' = \cos 15x \cdot 15 = 15\cos x.$$

Приклад 4. Знайти похідну складеної функції $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}, (x > 0)$.

Розв'язання. $y = \operatorname{arctg} u, u = \sqrt{x}$.

$$y' = (\operatorname{arctg} u)' \cdot u' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u' = \frac{1}{1+x} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

Приклад 5. Знайти похідну складеної функції $y = \log_5(x^2 + 4)$.

Розв'язання. Після деякого числа вправ зручно відмовитись від введення проміжного аргументу u, розуміючи його в тих місцях, де він потрібен.

$$y' = \frac{1}{(x^2+4)\ln 5}(x^2+4)' = \frac{1}{(x^2+4)\ln 5}2x = \frac{2x}{(x^2+4)\ln 5}.$$

Приклад 6. Знайти похідну неявної функції $5x + 3y - 7 = 0$.

Розв'язання. Продиференціюємо по x обидві частини рівняння, враховуючи, що y є функцією від x: $5 + 3y' = 0$.

Розвяжемо рівняння відносно y': $3y' = -5; y' = -\frac{5}{3}$.

Приклад 7. Знайти похідну неявної функції $y = tg(x + y)$.

Розв'язання. Знайдемо похідну

$$y' = \frac{1}{\cos^2(x+y)} \cdot (1 + y').$$

Виразимо y':

$$y' = \frac{1}{\cos^2(x+y)} + \frac{y'}{\cos^2(x+y)}, \quad y'\left(1 - \frac{1}{\cos^2(x+y)}\right) = \frac{1}{\cos^2(x+y)},$$

$$y'\frac{\cos^2(x+y)-1}{\cos^2(x+y)}=\frac{1}{\cos^2(x+y)},\ \ y'=\frac{1}{\cos^2(x+y)-1}.$$

Приклад 8. Знайти похідну параметричної функції

$$\begin{cases} x=\operatorname{tg} t \\ y=\sin t \end{cases}.$$

Розв'язання. Маємо

$$x_t'=\frac{1}{\cos^2 t},\quad y_t'=cost,\quad y'=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{cost}{\frac{1}{\cos^2 t}}=\cos^3 t.$$

Приклад 9. Знайти похідну параметричної функції

$$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\operatorname{arctg} t \end{cases}.$$

Розв'язання.

$$x_t'=\frac{2t}{1+t^2},\quad y_t'=1-\frac{1}{1+t^2}=\frac{t^2}{1+t^2}.$$

$$y'=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}}=\frac{t^2(1+t^2)}{(1+t^2)2t}=\frac{t}{2}.$$

Питання для самоперевірки

1. Яку функцію називають складною?

2. Згадайте правило диференціювання складної функції.

3. Яку функцію називають заданою неявно? Навести приклади.

4. У чому полягає правило диференціювання функції, заданої неявно?

5. Яка функція називається заданою параметрично?

4 Пригадайте формулу для знаходження похідної від функції, заданої параметрично.

Вправи

Обчислити похідні складених функцій:

1. $y=\sqrt{x^2+2}$. **Відповідь:** $\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$.

2. $y=\sqrt[3]{x^2+\cos x}$. **Відповідь:** $\frac{2x-\sin x}{3\sqrt[3]{(x^2+\cos x)^2}}$.

3. $y=\cos 9x$. **Відповідь:** $-9\sin 9x$.

4. $y = \arccos\frac{3x-1}{\sqrt{5}}$. **Відповідь:** $-\frac{3}{\sqrt{4+6x-9x^2}}$.

Обчислити похідні неявних функцій:

5. $5x^2 + 3xy - 2y^2 + 2 = 0$. **Відповідь:** $\frac{10x+3y}{4y-3x}$.

6. $y^5 - 5axy + x^5 = 0$. **Відповідь:** $\frac{ay-x^4}{y^4-ax}$.

7. $y = \cos(x + y)$. **Відповідь:** $-\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$.

8. $y = x + \operatorname{arctg} y$. **Відповідь:** $\frac{1+y^2}{y^2}$.

Обчислити похідні параметричних функцій:

9. $\begin{cases} x = a(1-t) \\ y = a\,t \end{cases}$. **Відповідь:** -1.

10. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$. **Відповідь:** $\operatorname{tg} t$.

11. $\begin{cases} x = \frac{1-t}{1+t} \\ y = \frac{2t}{1+t} \end{cases}$. **Відповідь:** -1.