РОЗДІЛ VI. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Тема 12. Похідна функції. Основні правила диференціювання

Теоретичні відомості

За означенням *похідна функції* $y = f(x)$ *в точці* x_0 обчислюється за формулою

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

якщо границя існує і скінченна. Тут $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) -$ *приріст функції*, $\Delta x -$ *приріст аргументу* $(\Delta x \neq 0)$.

Операція знаходження похідної називається *диференціюванням* цієї функції.

Механічний зміст похідної

Якщо матеріальна точка рухається прямолінійно і її координата змінюється за законом $s = s(t)$, то швидкість її руху $v(t)$ в момент часу t дорівнює похідній $s'(t)$: $v(t) = s'(t)$.

Геометричний зміст похідної

Значення похідної функції $y = f(x)$ в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0:

$$f'(x_0) = k = tg\alpha.$$

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці x_0 має вигляд

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці x_0 має вигляд

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Правила диференціювання

1. $\mathrm{C}' = 0$ $(\mathrm{C} = const)$;
2. $(Cu)' = Cu'$;
3. $\big(u(x) \pm v(x)\big)' = u'(x) \pm v'(x)$;
4. $(uv)' = u'v + v'u$;

5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$.

Таблиця основних елементарних функцій

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$ ($n -$ будь-яке дійсне число)
2. $(a^x)' = a^x lna \quad (a > 0, a \neq 1)$
3. $(e^x)' = e^x$
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{xlna}$ $(a > 0, a \neq 1)$
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
6. $(\sin x)' = \cos x$
7. $(\cos x)' = -\sin x$
8. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Обчислити похідну функції $f(x) = x^2$ за означенням.

Розв'язання. Знайдемо приріст функції: $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$. Для даної функції

$$\Delta f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 =$$

$$= 2x\Delta x + \Delta x^2 = \Delta x(2x+\Delta x).$$

Знаходимо похідну функції за формулою:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x+\Delta x) = 2x.$$

Приклад 2. Обчислити похідну функції $y = -4\sin x$.

Розв'язання. $y' = (-4\sin x)' = -4(\sin x)' = -4\cos x$.

Приклад 3. Обчислити похідну функції $y = \sin\frac{\pi}{8}$.

Розв'язання. $y' = \left(\sin\frac{\pi}{8}\right)' = 0$.

Приклад 4. Обчислити похідну функції $y = x^3 - \frac{1}{x^4} + 6\sqrt[3]{x^2}$.

Розв'язання. $y = x^3 - \frac{1}{x^4} + 6\sqrt[3]{x^2} = x^3 - x^{-4} + 6x^{2/3}$. Знайдемо похідну

$$y' = 3x^2 + 4x^{-5} + 6 \cdot \frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{3} = 3x^2 + \frac{4}{x^5} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}.$$

Приклад 5. Знайти похідну від добутку $y = (x^2 - 1)tg\ x$.

Розв'язання.

$$y' = (x^2 - 1)'tg\ x + (x^2 - 1)(tg\ x)' = 2xtg\ x + (x^2 - 1)\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Приклад 6. Знайти похідну функції $y = \frac{\arccos x}{x^2 + e^x}$.

Розв'язання.

$$y' = \frac{(\arccos x)'(x^2 + e^x) - \arccos x(x^2 + e^x)'}{(x^2 + e^x)^2} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(x^2 + e^x) - \arccos x(2x + e^x)}{(x^2 + e^x)^2} =$$

$$= -\frac{x^2 + e^x + \arccos x(2x + e^x)\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}(x^2 + e^x)^2}.$$

Приклад 7. Знайти похідну функції $y = \frac{x^5 + 3^x}{\log_3 5}$.

Розв'язання. $y' = \frac{(x^5 + 3^x)'}{\log_3 5} = \frac{5x^4 + 3^x \ln x}{\log_3 5}$.

Приклад 8. Який кут утворює з віссю абсцис дотична до кривої $y = \frac{4}{15}x^5 - \frac{1}{9}x^3$, проведена в точці з абсцисою $x = 1$.

Розв'язання. Знаходимо похідну $y' = \frac{4}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^2$. При $x = 1$ $y'(1) = 1$,

тобто $tg\alpha = 1$, звідки $\alpha = 45^{\circ}$.

Питання для самоперевірки

1. Що називається приростом аргументу і приростом функції?
2. Дайте означення похідної функції.
3. У чому полягає геометричне тлумачення похідної?
4. Яке механічне тлумачення має похідна?
5. Запишіть рівняння дотичної та нормалі до кривої.
6. Сформулюйте основні правила диференціювання функції.
7. Напишіть таблицю похідних основних елементарних функцій.

Вправи

1. Обчислити за означенням похідні функцій:

а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = \frac{1}{x}$; в) $y = \frac{1}{x^2}$.

Відповідь: а) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; б) $y' = -\frac{1}{x^2}$; в) $y' = -\frac{2}{x^3}$.

2. Знайти похідні функцій:

а) $y = \cos\frac{\pi}{10}$; б) $y = \arcsin\frac{1}{6} + \operatorname{arctg} 2$; в) $y = -\frac{2}{3}\operatorname{tg} x$.

Відповідь: а) $y' = 0$; б) $y' = 0$; в) $y' = -\frac{2}{3\cos^3 x}$.

3. Знайти похідні функцій:

а) $y = \arcsin \mathrm{x} + \log_3 x$; б) $y = \operatorname{ctg} x - 6\cos x$; в) $y = x^3 + 3\sin x + 2e^x$.

Відповідь: а) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{xln3}$; б) $y' = -\frac{1}{\sin^3 x} + 6\sin x$;

в) $y' = 3x^2 + +3\cos x + 2e^x$.

4. Обчислити похідні функцій:

а) $y = x\ln x$; б) $y = \frac{x-1}{\log_2 x}$; в) $y = \frac{1-e^x}{1+e^x}$.

Відповідь: а) $y' = 1 + \ln x$; б) $y' = \frac{x\ln x - x + 1}{x\ln^2 x}\ln 2$; в) $y' = -\frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$.