

РОЗДІЛ VII. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Тема 16. Невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування

Теоретичні відомості

Невизначеним інтегралом $\int f(x)dx$ функції $f(x)$ (на проміжку X) називають вираз $F(x) + C$, де $F(x)$ – одна з первісних функції $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$ $x \in X$; C – довільна стала.

Таблиця основних невизначених інтегралів

- | | |
|----------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq 1$ | 10. $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$ |
| 2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ | 11. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C, a > 0$ |
| 3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1.$ | 12. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left \frac{x-1}{x+1} \right + C$ |
| 4. $\int e^x dx = e^x + C$ | 13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C, a > 0$ |
| 5. $\int \cos x dx = \sin x + C$ | 14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C$ |
| 6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ | 15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln x + \sqrt{x^2+a} + C$ |
| 7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ | 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln x + \sqrt{x^2+1} + C$ |
| 8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ | |
| 9. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a > 0$ | |

Безпосереднє інтегрування

Безпосереднє інтегрування невизначених інтегралів ґрунтується на тотожних перетвореннях підінтегральної функції та властивостях невизначеного інтеграла.

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx, k = \operatorname{const}, k \neq 0.$
2. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$ (Ця властивість узагальнюється на довільне скінченне число доданків)
3. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то для будь-яких сталих k, b ($k \neq 0$)

$$\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C.$$

Заміна змінної

Обчислення невизначених інтегралів методом заміни змінної ґрунтується на формулі

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C,$$

де $F(x)$ – первісна $f(x)$; $\varphi'(x)$ – похідна функції $\varphi(x)$.

Інтегрування частинами

Обчислення невизначених інтегралів методом інтегрування частинами полягає у використанні формули

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

де u, v – функції змінної x ; $du = u'(x)dx$, $dv = v'(x)dx$.

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Безпосереднім інтегруванням обчислити:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; б) $\int \frac{dx}{2^x}$; в) $\int \frac{dx}{x^2+9}$.

Розв'язання.

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C.$

б) $\int \frac{dx}{2^x} = \int \frac{1}{2^x} dx = \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln \frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{2^x \ln 2} + C.$

в) $\int \frac{dx}{x^2+9} = \int \frac{dx}{x^2+3^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C.$

Приклад 2. Використовуючи властивості невизначеного інтеграла, знайти:

а) $\int \frac{3dx}{\cos^2 x}$; б) $\int \frac{dx}{4-x^2}$; в) $\int \left(4 - \frac{3}{x} + \frac{e^x}{2}\right) dx.$

Розв'язання.

а) $\int \frac{3dx}{\cos^2 x} = 3 \int \frac{dx}{\cos^2 x} = 3 \operatorname{tg} x + C.$

б) $\int \frac{dx}{4-x^2} = \int \frac{dx}{-(x^2-4)} = -\int \frac{dx}{x^2-2^2} = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C.$

$$\begin{aligned} \text{в)} \int \left(4 - \frac{3}{x} + \frac{e^x}{2}\right) dx &= \int 4 dx - \int \frac{3}{x} dx + \int \frac{1}{2} e^x dx = 4 \int dx - 3 \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int e^x dx = \\ &= 4x - 3 \ln|x| + 0,5e^x + C. \end{aligned}$$

Приклад 3. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а)} \int \cos^2 \frac{x}{2} dx; \quad \text{б)} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}.$$

Розв'язання.

$$\text{а)} \int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1 + \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) dx = \frac{1}{2} (x + \sin x) + C.$$

$$\text{б)} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}. \text{ Спочатку виділимо в знаменнику повний квадрат відносно } x: x^2 + 4x + 13 = (x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2) + 9 = (x + 2)^2 + 9.$$

Обчислюємо інтеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13} = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 9} = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 3^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x + 2}{3} + C.$$

Приклад 4. Використовуючи заміну змінної знати:

$$\text{а)} \int \sin^2 \cos x dx; \quad \text{б)} \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx.$$

Розв'язання.

$$\text{а)} \int \sin^2 \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + C = \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

$$\text{б)} \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{array} \right| = \int \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} (\operatorname{tg} x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Приклад 5. Обчислити невизначені інтеграли:

$$\text{а)} \int x \cos x dx; \quad \text{б)} \int (3x - 1)e^x dx.$$

Розв'язання.

$$\text{а)} \text{ Покладемо } u = x, dv = \cos x dx. \text{ Тоді } du = (x)' dx = dx, v = \int dv = \sin x$$

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= x \sin x - \int \sin x dx = \\ &= x \sin x - (-\cos x) + C = x \sin x + \cos x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \int (3x - 1)e^x dx &= \left| \begin{array}{l} u = 3x - 1 \\ dv = e^x dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du = 3dx \\ v = e^x \end{array} = (3x - 1)e^x - \int 3e^x dx = \\ &= (3x - 1)e^x - 3e^x + C. \end{aligned}$$

Питання для самоперевірки

1. Що називають невизначеним інтегралом?
2. Записати основні властивості невизначеного інтеграла.
3. Які методи інтегрування існують?

Вправа

1. Безпосереднім інтегруванням обчислити:

а) $\int \sqrt[3]{x} dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2+4}$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

Відповідь: а) $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$; б) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$; в) $\ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$.

2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int (9x^5 - \sqrt[5]{x}) dx$; б) $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1}$; в) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$; г) $\int \frac{dx}{9-5x^2}$; д) $\int \frac{10dx}{x^2-8x-9}$.

Відповідь: а) $\frac{3}{2}x^6 - \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}} + C$; б) $\frac{1}{3}x^3 - x + \operatorname{arctg} x + C$; в) $-\operatorname{ctg} x - x + C$,

г) $-\frac{1}{6\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5}x-3}{\sqrt{5}x+3} \right| + C$; д) $\ln \left| \frac{x-9}{x+1} \right| + C$.

3. Використовуючи заміну змінної знати:

а) $\int 2^{\sin x} \cos x dx$; б) $\int \frac{(2x+5)}{\sqrt{x^2+5x+9}} dx$; в) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x-4}}$; г) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}}$.

Відповідь:

а) $\frac{1}{\ln 2} 2^{\sin x} + C$; б) $2\sqrt{x^2+5x+9} + C$; в) $\ln|\ln x + \sqrt{\ln^2 x-4}| + C$;

г) $-\frac{1}{2(\arcsin x)^2} + C$.

4. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int (3-4x) \cos 2x dx$; б) $\int x^2 e^x dx$; в) $\int x \ln x dx$.

Відповідь: а) $\frac{3-4x}{2} \sin 2x - \cos 2x + C$; б) $(x^2 - 2x + 2)e^x + C$;

в) $\frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) + C$.