Тема 20. Диференціювання складної, неявної функції.

Похідні вищих порядків. Екстремум.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти похідну від неявної функції $y^5+2x^2y^2+xy-42=0$ в точці $x=1,\ y=2$.

Маємо $F'_x=4xy^2+y$, $F'_y=5y^4+4x^2y+x$, звідки

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{4xy^2+y}{5y^4+4x^2y+x}.$$

Для $x=1,\ y=2$ маємо $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{18}{89}$.

Приклад 2. Знайти d^2z, якщо $z=\sin x\cdot\sin y$.

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\cos x\sin y,$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\sin x\cos y,$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\sin x\sin y,$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos x\cos y,$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\sin x\sin y,$

$$d^2z=-\sin x\sin y\,dx^2+2\cos x\cos y\ dx\,dy-\sin x\sin y\,dy^2.$$

Приклад 3. Знайти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$ для функції $z=x^2y^3$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^3,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6xy^2,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=12xy.$$

Приклад 4. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z=\frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2b}\ \left(a>0, b>0\right).$$

1. Знайдемо z'_x і z'_y:

$$z'_x=\frac{x}{a},\ z'_y=\frac{y}{b}.$$

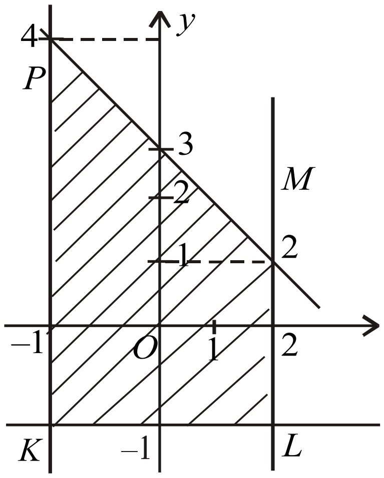
2. Необхідна умова екстремуму: $\begin{cases}\dfrac{x}{a}=0\\ \dfrac{x}{b}=0\end{cases}.$

Отже, (0; 0) — стаціонарна точка.

3. Знайдемо z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}:

$$z''_{xx}=\frac{1}{a},\ z''_{xy}=0,\ z''_{yy}=\frac{1}{b}.$$

Приклад 5. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в області, обмеженій прямими $x = -1$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 3 - x$ (мал.5).



Мал. 5

1. Дослідимо поводження функції всередині області *KLMP*. Знайдемо перші частинні похідні функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$: $\quad : \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x$.
Прирівнявши їх до нуля, дістанемо стаціонарні точки $O(0;\ 0)$ та $E(1;\ 1)$.

2. Дослідимо поводження функції на межі області. Відрізок *KL* має рівняння $y = -1$, $-1 \le x \le 2$. Підставивши $y = -1$ у задану функцію, дістанемо $z = x^3 - 1 + 3x$. Треба знайти найбільше та найменше значення цієї функції на відрізку $[-1;\ 2]$.

Маємо $z' = 3x^2 + 3 > 0$, отже, функція зростає і тому досягає найбільшого значення на кінцях відрізка, тобто в точках $K(-1;\ -1)$ і $L(2;\ -1)$.

Відрізок LM має рівняння $x = 2$, $-1 \le y \le 1$. Підставивши $x = 2$ у задану функцію, дістанемо функцію z як функцію від змінної y: $z = 8 + y^3 - 6y$. Маємо $z' = 3y^2 - 6 < 0$ на відрізку $[-1;\ 1]$.

Отже, функція $z = 8 + y^3 - 6y$ досягає найбільшого та найменшого значень на кінцях відрізка, тобто в точках $L(2;\ -1)$ і $M(2;\ 1)$.

Відрізок PM має рівняння $y = 3 - x$, $-1 \le x \le 2$. Підставивши $y = 3 - x$ у задану функцію, дістанемо функцію z як функцію від змінної x: $z = x^3 + (3 - x)^3 - 3x(x - 3)$, тобто $z = 27 - 36x + 12x^2$. Маємо $z' = 24x - 36$, звідки $z' = 0$ при $x = \dfrac{3}{2}$. Отже, на відрізку PM функція може досягати найбільшого та найменшого значень у точках $M(2;\ 1)$, $P(-1;\ 4)$ та $T\left(\dfrac{3}{2};\ \dfrac{3}{2}\right)$.

Відрізок KP має рівняння $x = -1$, $-1 \le y \le 4$. Підставивши $x = -1$ у задану функцію, дістанемо $z = -1 + y^3 + 3y$. Маємо $z' = 3y^2 + 3 > 0$, отже, функція досягає найбільшого та найменшого значень на кінцях відрізка, тобто в точках $K(-1;\ -1)$, $P(-1;\ 4)$.

Таким чином, функція $z = x^3 + y^2 - 3xy$ може досягти найбільшого та найменшого значень тільки в таких точках: $O(0;0)$, $E(1;\ 1)$, $K(-1;-1)$, $L(2;\ -1)$, $M(2;\ 1)$, $P(-1;\ 4)$, $T\left(\dfrac{3}{2};\ \dfrac{3}{2}\right)$.

Знаходимо $f(0;0)=0$, $f(1;\,1)=-1$, $f(-1;-1)=-5$, $f(2;-1)=13$, $f(2;\,1)=3$, $f(-1;4)=75$, $f\left(\frac{3}{2};\,\frac{3}{2}\right)=0$.

Отже, $z_{\min}=-5$, і це значення досягається в точці $(-1;\,-1)$, $z_{\max}=75$, і це значення досягається в точці $(-1;\,4)$.

Задачі

1. Знайти похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ для таких функцій:

1. $z=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}$.   2. $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

3. $z=c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$.   4. $z=\ln\left(x^2+y\right)$.

5. $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.   6. $z=\sin^2(ax+by)$.

7. $z=e^{xe^y}$.   8. $z=\frac{x-y}{x+y}$.

2. Знайти повний диференціал другого порядку d^2z, якщо:

1. $z=xy^2-x^2y$.   2. $z=\ln(x-y)$.

3. $z=\frac{1}{2\left(x^2+y^2\right)}$.   4. $z=x\sin^2 y$.

5. $z=e^{xy}$ 6. $z=x\ln\frac{y}{x}$.

3. Дослідити на екстремум функції:

1. $z=x^2-xy+y^2-9x-6y+20$.
2. $z=x^2+(y-1)^2$.
3. $z=x^2-(y-1)^2$.
4. $z=x^2-xy+y^2-2x+y$.
5. $z=x^2y^3(6-x-y)$; $x>0$; $y>0$.
6. $z=x^3+y^3-3xy$.
7. $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$.

4. Знайти найбільше та найменше значення функції у заданих областях:

1. $z=1+x+12y$, якщо: $x\ge 0$; $y\ge 0$; $x+y\le 1$.

2. $z = x^2 y$, якщо: $x^2 + y^2 \le 1$.

3. $z = x^3 + y^3 - 3xy$, якщо: $0 \le x \le 2$; $-1 \le y \le 2$.

4. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, якщо: $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 2$.