Розділ VIII. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОЇ ЗМІННИХ

Тема 19. Область існування функції багатьох змінних. Задання областей нерівностями. Знаходження частинних похідних, диференціалу.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Знайти область визначення функції двох змінних та надати їй геометричну інтерпретацію:

а) $z = \sqrt[4]{1 - x^2 - y^2}$;

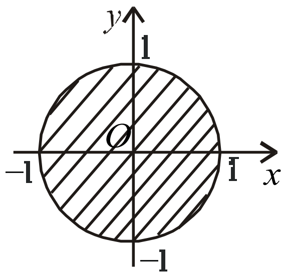
б) $z = \ln\left(x^2 + y^2 - 4\right)$;

в) $z = \sqrt{\sin\pi\left(x^2 + y^2\right)}$.

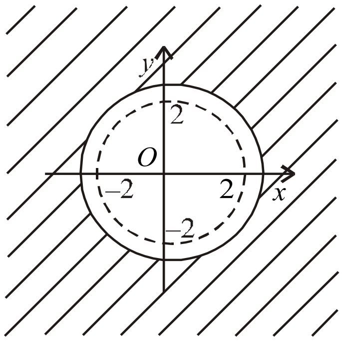
а) Функція визначена, якщо $1 - \left(x^2 + y^2\right) \geq 0$, тобто $x^2 + y^2 \leq 1$. Це є коло з центром (0; 0) та радіусом 1 (мал. 2).

б) Функція визначена, якщо $x^2 + y^2 - 4 > 0$, тобто $x^2 + y^2 > 4$ (мал. 3).

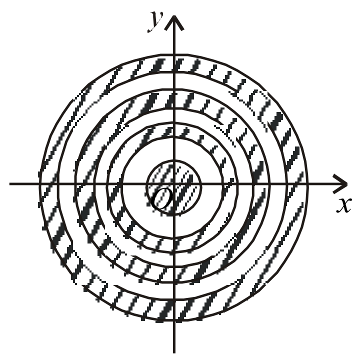
в) Функція визначена, якщо $\sin\pi\left(x^2 + y^2\right) \geq 0$, тобто $2n \leq x^2 + y^2 \leq 2n + 1$ $\left(n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\right)$ (мал. 4).



Мал. 2



Мал. 3



Мал. 4

Приклад 2. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ для функції $z = x^3 y + \sin\left(x^2 + \sqrt{y}\right) + \ + \operatorname{tg} x + \ln y$.

Знайдемо $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. Вважаючи, що $y = \text{const}$, дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + \cos\left(x^2 + \sqrt{y}\right) \cdot 2x + \frac{1}{\cos^2 x}.$$

При знаходженні $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ вважаємо, що $x = \text{const}$. Дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + \cos\left(x^2 + \sqrt{y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{y}.$$

Приклад 3. Знайти повний диференціал функції двох змінних:

$$z = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{x-y}.$$

Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{-2y}{(x-y)^2} = \frac{-y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Отже, $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$.

Задачі

1. Знайти та зобразити області визначення функцій двох змінних:

1. $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$.
2. $z = \ln\left(x^2+y\right)$.
3. $z = \log_x y$.
4. $z = \arccos x + \arcsin y$.
5. $z = \sqrt{4x^2+9y^2-36}$.
6. $z = \arcsin\frac{x}{y}$.
7. $z = \frac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$.
8. $z = \sqrt{x^2-y^2-1}$.

2. Знайти частинні похідні функцій:

1. $z = x^2+y^3-2axy$.
2. $z = x^2y^3-\sqrt{x+y}$.
3. $z = \frac{x+y}{x+y+1}$.
4. $z = (x+y)\sqrt{x-y}$.
5. $u = \frac{xy}{z}+(xy)^z$.
6. $z = \ln\left(2x^2-y^2\right)$.
7. $z = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$.
8. $z = x\cdot e^{\sin\frac{x}{y}}$.

3. Обчислити частинні похідні функцій:

1. $z = \ln\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ у точці $(1;1)$.

2. $z = x^2y^3 + \sqrt{x^2y}$ у точці $(-1;1)$.

3. $z = \dfrac{(x+y)^3 - 3xy(x+y)}{x^2 - xy + y^2}$ у точці $(0{,}1;1{,}1)$.

4. Знайти повні диференціали першого порядку функцій:

1. $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

2. $z = yx^y$.

3. $z = 2^{\operatorname{arctg}^2(xy+y^2)}$.

4. $z = x\cos(y^x)$.

5. $u = \left(xy + \dfrac{x}{y}\right)^z$.

6. $u = \operatorname{arctg}\dfrac{xy}{z^2}$.

5. Знайти $\dfrac{dz}{dt}$, якщо: $z = \dfrac{x}{y}$; $x = e^t$; $y = \ln t$.

6. Знайти $\dfrac{dz}{dt}$, якщо: $z = \ln\sin\dfrac{x}{\sqrt{y}}$; $x = 3t^2$; $y = \sqrt{t^2+1}$.

7. Знайти $\dfrac{du}{dt}$, якщо: $u = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $x = R\cos t$; $y = R\sin t$; $z = H$.

8. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, якщо: $z = \operatorname{arctg}\dfrac{u}{v}$; $u = x^2 - y; V = y^2 - x$.