РОЗДІЛ. ВСТУП ДО ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Тема 11. Комплексні числа і дії щодо них

Теоретичні відомості

Комплексним числом z називається вираз $z = x + iy$, де x і y – будь-які дійсні числа, а i – уявна одиниця, яку визначено рівністю $i^2 = -1$.

Задання комплексного числа у вигляді $z = x + iy$ називається *алгебраїчною формою комплексного числа*. Число x називається *дійсною частиною*, а y – *уявною частиною* числа z, їх позначають так: $x = Re(z)$; $y = Im(z)$.

Оскільки $x = \rho cos\varphi, y = \rho sin\varphi$, то комплексне число z можна представити у *тригонометричній формі*

$$z = \rho(cos\varphi + isin\varphi),$$

де ρ називається *модулем* комплексного числа z, φ – *аргументом*. Позначення: $\rho = |z|, \varphi = Argz$.

За означенням модуля й аргументу випливає

$$|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ tg(Arg\, z) = tg\varphi = \frac{y}{x},\ \ sin\varphi \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \ cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі

Нехай $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 =$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2);$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Числа $z = x + iy$ і $\bar{z} = x - iy$ називаються *взаємно спряженими*. Для спряжених комплексних чисел:

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Дії над комплексними числами в тригонометричній формі

Нехай $z_1 = \rho_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1),\ z_2 = \rho_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)$. Тоді

$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2))$;

$z^n = (\rho(cos\varphi + isin\varphi))^n = \rho^n(cos\, n\varphi + isin\, n\varphi)$;

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + isin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), (k = 0,1,2, \dots, n-1).$

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Знайти $(3 + 5i)(4 - i)$.

Розв'язання. За правилом множення двох многочленів

$(3 + 5i)(4 - i) = 12 + 20i - 3i - 5i^2 = 12 + 5 + (20 - 3)i = 17 + 17i.$

Тут враховано, що $i^2 = -1$.

Приклад 2. Обчислити $\frac{3-i}{4+5i}$.

Розв'язання. Помножимо чисельник і знаменник на число $4 - 5i$, спряжене знаменнику, і виконаємо відповідні дії. Тоді

$$\frac{3 - i}{4 + 5i} = \frac{(3 - i)(4 - 5i)}{(4 + 5i)(4 - 5i)} = \frac{12 - 4i - 15i + 5i^2}{16 + 25} = \frac{7 - 19i}{41} = \frac{7}{41} - \frac{19}{41}i.$$

Приклад 3. Знайти $(4 - 7i)^3$.

Розв'язання. Використовуючи формулу куба різниці двох чисел, одержимо

$$(4 - 7i)^3 = 64 - 3 \cdot 16 \cdot 7i + 3 \cdot 4 \cdot 49i^2 - 343i^3 =$$
$$= 64 - 336i + +588i^2 - 343i^3 =$$
$$= 64 - 336i + +588 - 343i = -524 + 7i,$$

оскільки $i^2 = -1$, а $i^3 = i^2 \cdot i = -i$.

Приклад 4. Подати в тригонометричній формі число $z = 1 - i$.

Розв'язання. За формулами $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\varphi = \arg z = arctg\, \frac{y}{x}$. Маємо $x = 1$, $y = -1$, тому $r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $\varphi = arctg\, \left(\frac{-1}{1}\right) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = = \frac{7}{4}\pi$, через те що φ −кут четвертої чверті, бо $x = 1 > 0$ і $y = -1 < 0$. Тоді

$$r = 1 - i = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} - isin\frac{\pi}{4}\right),$$

бо $cos\frac{7\pi}{4} = cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \ cos\frac{\pi}{4}, sin\frac{7\pi}{4} = sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \ sin\frac{\pi}{4}$.

Приклад 5. Установити, чи рівні між собою комплексні числа $\sqrt{3} + i$ та $2\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right)$.

Розв'язання. Запишимо число $2\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right)$ в алгебраїчній формі. Для цього знайдемо значення x та y:

$$x = 2cos\frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},\ \ y = 2sin\frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Таким чином, $2\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$. Отже, дані комплексні числа рівні між собою.

Приклад 6. Знайти добуток комплексних чисел $z_1 = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$ і $z_2 = 3\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right)$.

Розв'язання.

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 3\left[cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right] =$$

$$= 6\left(cos\frac{\pi}{2} + +isin\frac{\pi}{2}\right) = 6(0 + i) = 6i.$$

Приклад 7. Знайти частку $\frac{z_1}{z_2}$, якщо $z_1 = 4\left(cos\frac{4\pi}{3} + isin\frac{4\pi}{3}\right)$,

$z_2 = 2\left(cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6}\right)$.

Розв'язання.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{2}\left[cos\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}\right)\right] = 2\left(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right) = 2i.$$

Приклад 8. Обчислити $(1 + i)^6$.

Розв'язання. Подамо число $z = 1 + i$ в тригонометричній формі:

$$z = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right).$$

Тоді за формулою Муавра:

$$(1 + i)^6 = \left[\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)\right]^6 = 2^3\left(cos\frac{3\pi}{2} + isin\frac{3\pi}{2}\right) = -8i.$$

Приклад 9. Знайти всі значення $\sqrt[3]{-2+2i}$.

Розв'язання. Подамо комплексне число $z=-2+2i$ в тригонометричній формі. Маємо

$$r=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2},\ \varphi=arctg\left(\frac{-2}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}.$$

Тоді

$$\sqrt[3]{-2+2i}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}+isin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)=$$

$$\sqrt{2}\left(cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}+isin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right),\ k=0,1,2.$$

При $k=0$: $z_1=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+i.$

При $k=1$: $z_2=-1{,}366+0{,}365i.$

При $k=2$: $z_3=0{,}366-1{,}366i.$

Приклад 10. Для комплексних чисел $z_1=2+3i$ та $z_2=5-4i$ знайти суму, різницю, добуток та частку.

Розв'язання.

$z_1+z_2=(2+3i)+(5-4i)=7-i;$

$z_1-z_2=(2+3i)-(5-4i)=-3+7i;$

$z_1z_2=(2+3i)(5-4i)=10-8i+15i-12i^2=22+7i;$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(2+3i)(5+4i)}{(5-4i)(5+4i)}=\frac{10+8i+15i+12i^2}{25-16i^2}=-\frac{2}{41}+\frac{23}{41}i.$$

Питання для самоперевірки

1. Дайте означення комплексного числа.

2. Як визначається уявна одиниця?

3. Який вигляд має алгебраїчна та тригонометрична форми комплексного числа?

4. Які дії можна виконувати над комплексними числами?

5. За якими правилами виконуються дії над комплексними числами, заданими в алгебраїчній формі?

6. Запишіть і сформулюйте правила, за якими виконуються дії над комплексними числами, заданими в тригонометричній формі.

7. Чому дорівнюють модуль і аргумент комплексного числа?

Вправи

1. Обчислити дійсні значення x, y з рівнянь

а) $(2x - 13i) + (7y + 2xi) = -17 + 3yi;$

б) $\left(\frac{3}{4}x - 2yi\right) - \left(\frac{1}{3}y + 6xi\right) = 21i.$

Відповідь: а) $x = 2, y = -3$; б) $x = -2, y = -4{,}5$.

2. Знайти комплексне число z з рівняння $(2 - 3i)z = -1 - 5i.$

Відповідь: $1 - i.$

3. Довести рівність $\frac{2+i}{3-i} = \frac{13+4i}{17-9i}.$

4. Подати в алгебраїчній формі число $4(\cos 30^0 + i30^0 \sin 30^0).$

Відповідь: $2\sqrt{3} + 2i.$

5. Подати в тригонометричній формі числа: а) 3; б) $5i$.

Відповідь: а) $3(\cos 0^0 + i \sin 0^0)$, б) $5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\ \sin\frac{\pi}{2}\right).$

6. Піднести до куба число $z = 2(\cos 20^0 + i \sin 20^0).$

Відповідь: $4 + 4i.$

7. Піднести до 20-го степеня число $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

Відповідь: $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

8. Обчислити всі значення коренів: а) $\sqrt[4]{i}$; б) $\sqrt[3]{1}.$

Відповідь: а) $z_1 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$; $z_2 = \cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}$; $z_3 = \cos\frac{9\pi}{8} +$ $+ i\sin\frac{9\pi}{8}$; $z_4 = \cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}$;

б) $z_1 = 1$; $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

9. Знайти модуль і аргумент комплексного числа $(1 + 3i)(2 - i).$

Відповідь: $r = 5\sqrt{2}$; $\varphi = \frac{\pi}{4}.$