РОЗДІЛ IV. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Тема 9. Обчислення границь

Теоретичні відомості

Число a називається *границею послідовності* $\{x_n\}$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться число N_0, що для $n > N_0$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$. При цьому кажуть, що послідовність $\{x_n\}$ *збігається* до числа a. Позначення: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ або $x_n \to a$.

Число A називають *границею функції* $f(x)$ *в точці* x_0, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta > 0$, що для всіх значень x з області визначення функції, які задовольняють умову $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначення: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ або $f(x) \to A$ при $x \to x_0$.

Число A називають *границею функції* $f(x)$ при $x \to \infty$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta > 0$, що для всіх значень x з області визначення функції, які задовольняють умову $|x| > \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначення: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ або $f(x) \to A$ при $x \to \infty$.

При обчисленні границь зручно використовувати ряд їх властивостей:

I (арифметичні властивості границь)

Якщо існують $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то

а) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

в) $\lim\limits_{x\to x_0} [\mathrm{c} \cdot g(x)] = \mathrm{c} \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

г) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

II (границя суперпозиції функцій)

Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$ та $\lim\limits_{x\to a} f(t) = A$, то існує границя складної функції $\lim\limits_{x\to x_0} f\big(g(x)\big) = A$.

Використовуються також границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \text{ (перша визначна границя)};$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \text{ (друга визначна границя)}.$$

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Показати, що послідовність $\frac{3}{4}; \frac{5}{7}; \frac{7}{10}; \ldots; \frac{2n+1}{3n+1}; \ldots$ має границю число $\frac{2}{3}$.

Розв'язання. Загальний член послідовності $x_n = \frac{2n+1}{3n+1}$. Тому

$$x_n - \frac{2}{3} = \frac{2n+1}{3n+1} - \frac{2}{3} = \frac{3(2n+1)-2(3n+1)}{3(3n+1)} = \frac{1}{3(3n+1)}.$$

Задамо додатнє число ε. Розглянемо нерівність $\left|x_n - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$, тобто $\frac{1}{3(3n+1)} < \varepsilon$. Помножимо обидві частини останньої нерівності на $\frac{3n+1}{\varepsilon}$: $\frac{1}{3\varepsilon} < 3n+1$, звідки $n > \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon} - 1\right)$.

Якщо за N_0 в означенні границі послідовності взяти число $N_0 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon} - 1\right)$, то для всіх $n > N_0$ виконуватиметься умова $\left|x_n - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$. Це означає, що $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3}$.

Приклад 2. Обчислити $\lim_{x\to 2}(x^2 - 3x + 2)$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ($D(f) = (-\infty; +\infty)$) є елементарною, то для обчислення її границі підставимо в аналітичний вираз функції замість аргументу його граничне значення. Одержимо,

$$\lim_{x\to 2}(x^2 - 3x + 2) = 4 - 6 + 2 = 0.$$

Приклад 3. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{1^3-1}{1-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 3.$$

Приклад 4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x-6}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x-6}=\frac{2\cdot 1^2+1-3}{1^2+5\cdot 1-6}=\frac{0}{0}.$$

Розкладемо чисельник та знаменник дробу на множники. Розглянемо рівняння $2x^2+x-3=0$. Його корені $x_1=1, x_2=-\frac{3}{2}$.

Отже, $2x^2+x-3=2(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)=(x-1)(2x+3)$.

Аналогічно, розв'язавши рівняння $x^2+5x-6=0$, одержимо

$x_1=1,\ x_2=-6$. Тому $x^2+5x-6=(x-1)(x+6)$. Отже,

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x-6}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x+3)}{(x-1)(x+6)}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+3)}{(x+6)}=\frac{5}{7}.$$

Приклад 5. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$.

Розв'язання. При $x=2$ чисельник і знаменник дробу дорівнюють нулю. Скористаємось основною властивістю дробу і помножимо чисельник і знаменник на вираз, який є спряжений до чисельника.Одержимо,

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+7}\right)^2-3^2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-7-9}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}=\frac{1}{\sqrt{2+7}+3}=\frac{1}{6}.$$

Приклад 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-3}{4x^2-x}$.

Розв'язання. В даному прикладі маємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$. Щоб розкрити дану невизначеність, поділимо чисельник і знаменник на x у найвищому степені, тобто на x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-3}{4x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}=$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4-\frac{1}{x}\right)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Використаємо першу визначну границю.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = 3\cdot 1 = 3.$$

Приклад 7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg\ 2x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg\ 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{5x}{2x}\cdot\cos 2x\right] =$$

$$= \frac{5}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 2x = \frac{5}{2}.$$

Приклад 8. $\lim\limits_{x\to 1} 2^{\frac{3x}{x+2}}$.

Розв'язання. Використаємо другу визначну границю

$$\lim_{x\to 1} 2^{\frac{3x}{x+2}} = 2^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x}{x+2}} = 2^{\frac{3\cdot 1}{1+2}} = 2.$$

Приклад 9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)^{\frac{2x+5}{x+1}}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)^{\frac{2x+5}{x+1}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+5}{x+1}} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}\right)\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2+\frac{5}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)} = \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{2}{1}} = 4.$$

Питання для самоперевірки

1. Що називається границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$ та $x \to \infty$?

2. Сформулюйте правила граничного переходу у випадку арифметичних дій.

3. Чому дорівнює границя сталої величини?

4. Які існують типи невизначеностей?

5. Сформулюйте першу і другу визначну границю.

Вправи

1. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$.

Відповідь: а) 9, б) $-\frac{2}{5}$, в) $\frac{1}{2}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$.

Відповідь: а) 0, б) $-\frac{1}{56}$, в) 0.

3. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

Відповідь: а) $\frac{2}{3}$, б) 0, в) e^6.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}\right)$.

Відповідь: а) -2, б) $\frac{5}{3}$, в) $-\frac{1}{2}$.