

Практичне заняття 8. Рівняння кола, еліпса, гіперболи та параболи.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Скласти рівняння кола з центром у точці $(5; -7)$, що проходить через точку $(2; -3)$.

Розв'язання

Знайдемо радіус кола як відстань між двома точками:

$$d = R^2 = (2 - 5)^2 + (-3 + 7)^2 = 25$$

Отже, $(x - 5)^2 + (y + 7)^2 = 25$ - шукане рівняння кола.

Відповідь, $(x - 5)^2 + (y + 7)^2 = 25$.

Приклад 2. Скласти канонічне рівняння еліпса, який проходить через точку $M(5;0)$, якщо фокальна відстань дорівнює 6.

Розв'язання

$|F_1F_2| = 2c = 6, c = 6 : 2 = 3$. Точка $M(5;0)$ належить еліпсу, тому

$$\frac{25}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1, a^2 = 25, a^2 - c^2 = b^2, b^2 = 25 - 9 = 16$$

Отже, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ - шукане рівняння.

Відповідь, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Приклад 3. Записати рівняння гіперболи, яка проходить через точку $A(6; 9)$, якщо:

- 1) відстань між фокусами дорівнює 8, а відстань між директрисами — 6;
- 2) директриси задано рівняннями $x = -3\sqrt{2}$, $x = 3\sqrt{2}$, а кут між асимптотами — прямий;
- 3) ексцентриситет дорівнює $\varepsilon = 2$, а уявна піввісь $b = 3$;
- 4) асимптоти задано рівнянням $y = \pm \frac{5}{3}x$.

Розв'язання

1) Координати фокусів $F_1(-c; 0)$; $F_2(c; 0)$, тому з умови $2c = 8$; $c = 4$, відстань між директрисами $b = \frac{2a}{\varepsilon}$. Звідки, враховуючи, що $\varepsilon = \frac{c}{a}$ маємо: $a^2 = 12$,

$$b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 12 = 4. \text{ Остаточнo } \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

2) З рівнянь директрис маємо: $\frac{a}{\varepsilon} = 3\sqrt{2}$, якщо кут між асимптотами прямий,

то $a = b$. Отже, з урахуванням формули $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ маємо $\varepsilon = \sqrt{2}$ і

$a = 6$; $b = 6$. Остаточно запишемо рівняння шуканої гіперболи: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{36} = 1$.

3) З формули, застосованої вище, дістаємо $\frac{3}{a} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$, звідки $a = \sqrt{3}$.

Отже, $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$.

4) Точка A належить гіперболі, тому маємо: $\frac{36}{a^2} - \frac{81}{b^2} = 1$. З рівняння асимптот

гіперболи випливає співвідношення $\frac{b}{a} = \frac{5}{3}$, або $b = \frac{5}{3}a$. Підставивши b в останнє співвідношення, дістанемо рівняння для знаходження a^2 :

$$\frac{36}{a^2} - \frac{81 \cdot 9}{25a^2} = 1; \quad a^2 = \frac{171}{25}, \quad b^2 = 19.$$

Отже, $\frac{25x^2}{171} - \frac{y^2}{19} = 1$.

Приклад 4. Скласти рівняння параболи, що має фокус $F = (0; -3)$ і проходить через початок координат, знаючи, що її віссю є вісь Oy .

Розв'язання

Оскільки фокус знаходиться у нижній півплощині, то й парабола, що міститься у нижній півплощині, симетрична відносно осі Oy . Її рівняння

$x^2 = -2py$. Фокус має координати $F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$. За умовою $-\frac{p}{2} = -3 \Rightarrow p = 6$.

Отже, рівняння параболи $x^2 = -12y$.

Задачі

1. Знайти рівняння кола, якщо відомі координати кінців одного з діаметрів AB : $A(1; 4)$, $B(-3; 2)$.

2. Скласти рівняння кола, що проходить через три задані точки: $A(0; 2)$, $B(1; 1)$, $C(2; -2)$.

3. Визначте центр і радіус кола, що задане рівнянням: $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$.

4. Звести до канонічного вигляду рівняння кіл:

1) $x^2 + y^2 - 4x = 0$; 2) $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$;

5. Скласти рівняння кола, що торкається осі OY у точці $A(0; -3)$ і має радіус $R = 2$.

6. Задано еліпс. Знайти: 1) його півосі; 2) фокуси; 3) ексцентриситет; 4) рівняння директрис; 5) побудувати його.

а) $4x^2 + 9y^2 = 25$; б) $x^2 + 15y^2 = 15$.

7. Дано рівняння еліпса: $25x^2 + 169y^2 = 4225$. Обчислити довжини осей, координати фокусів та його ексцентриситет.

8. Скласти канонічне рівняння еліпса, коли відомо, що:

1) півосі його дорівнюють 4 і 2 одиницям;

2) відстань між фокусами дорівнює 6, а велика піввісь — 5 одиницям;

3) велика піввісь дорівнює 10 одиницям, а ексцентриситет $\varepsilon = 0,8$;

4) мала піввісь дорівнює 3 одиницям, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

5) сума півосей дорівнює 8, а відстань між фокусами — також 8 одиницям.

9. Задано гіперболу. Знайти: 1) півосі a та b ; 2) фокуси; 3) ексцентриситет; 4) рівняння асимптот; 5) рівняння директрис; 6) побудувати гіперболу.

а) $9x^2 - 64y^2 = 1$; б) $4x^2 - 9y^2 = 36$.

10. Знаючи рівняння асимптот гіперболи $y = \pm \frac{1}{2}x$ і одну з точок на гіперболі $M(12; 3\sqrt{3})$, скласти рівняння гіперболи.

11. Написати рівняння гіперболи, що проходить через фокуси еліпса $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$, а її фокуси знаходяться в вершинах цього еліпса.

12. Знайти кут між асимптотами гіперболи, у якої ексцентриситет дорівнює 2.

13. Обчислити ексцентриситет гіперболи, якщо кут між асимптотами дорівнює: 1) 60° , 2) 90° .

14. Через точку $A(2; 1)$ провести таку хорду параболи $y^2 = 4x$, яка поділялася б цією точкою навпіл.

15. Через точку $P(5; -7)$ провести дотичну до параболи $y^2 = 8x$.

16. Знайти умову, за якої пряма $y = kx + b$ дотикається до параболи $y^2 = 2px$.