РОЗДІЛ IX. Диференціальні рівняння першого порядку
Лекція 26. Поняття диференціального рівняння

План

1. Основні поняття
2. Задача Коші

1. Основні поняття

Диференціальним рівнянням називається рівняння, яке містить похідну шуканої функції. Найбільший порядок похідних називається *порядком диференціального рівняння*.

У загальному випадку диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Далі замість слів «диференціальні рівняння» використовуватимемо позначення ДР.

Приклад. $y' = xy$ — ДР першого порядку;
$y'' + \sin y = 0$ — ДР другого порядку;
$y'''y' - y''y' = 0$ — ДР третього порядку.

Диференціальне рівняння може визначити функцію багатьох змінних.

Далі розглядатимемо лише диференціальні і різницеві рівняння, в яких шукана функція залежить лише від одного аргументу. Такі рівняння називаються звичайними. ДР першого порядку в загальному вигляді можна записати рівнянням

$$F(x,\ y,\ y') = 0. \qquad (1)$$

Це — ДР рівняння, що *не розв'язане відносно похідної*. Якщо рівняння (1) можна розв'язати відносно похідної, то рівняння (1) подаємо у вигляді

$$y' = f(x,\ y). \qquad (2)$$

Це ДР рівняння, що розв'язане відносно похідної, і його можна записати у вигляді $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ або $dy = f(x, y)dx$.

Якщо $f(x; y)$ є дробом, $f(x; y) = -\dfrac{M(x, y)}{N(x, y)}$, тоді ДР першого порядку можна записати в *симетричній формі*

$$M(x,\ y)dx + N(x,\ y)dy = 0. \qquad (3)$$

Означення. Розв'язком ДР $y' = f(x, y)$ називається функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці у ДР перетворює його на тотожність. Графік функції $y = \varphi(x)$ називається *інтегральною кривою*.

Приклад. Задача інтегрування функцій може бути розглянута як задача інтегрування ДР $y' = f(x)$ і має розв'язок $y = \int f(x)dx + c,$ який знаходиться інтегруванням, тобто квадратурою.

Інтегральні криві утворюються зсувом однієї з них вздовж осі *y*.

Приклад. ДР $y' = 3y$ має розв'язок $y = e^{3x}$.

Справді, $y' = 3e^{3x}$. Підставивши y' в рівняння, дістанемо тотожність $3e^{3x} \equiv 3e^{3x}$.

Звичайно, ДР має нескінченну множину розв'язків. Так, попереднє рівняння $y' = 3y$ має розв'язок $y = Ce^{3x}$, де C — довільний параметр.

2. Задача Коші

Розглянемо ДР $y' = f(x, y)$.

Задача пошуку розв'язку $y = \varphi(x)$, що задовольняє умови

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0. \tag{4}$$

називається *задачею Коші*. Умови (4) називаються *початковими умовами*, числа y_0, x_0 називаються *початковими значеннями*.

Теорема існування та єдиності розв'язків: нехай функція $f(x, y)$ неперервна в області D і задовольняє в області D умову Ліпшиця:

$$\left| f(x_1 y_1) - f(x, y_2) \right| \le L \left| y_1 - y_2 \right|, \; L = \text{const}, \tag{5}$$

тоді при $(x_0, y_0) \in D$ існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ ДР, який задовольняє початкові умови (4) $y_0 = \varphi(x_0)$.

Якщо в області *D* виконуються умови теореми існування та єдності, то через кожну точку області *D* проходить єдина інтегральна крива. Задача Коші полягає у знаходженні інтегральної кривої, що проходить через задану точку (x_0, y_0).

Умови (5) можна замінити іншою умовою: $\left| \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \le L.$ (6)

Точки, в яких порушується єдиність розв'язків ДР, називаються *особливими*. Розв'язок ДР називається *особливим*, коли всі точки на розв'язку особливі.

Якщо в диференціальному рівнянні першого порядку

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}; \qquad P(x_0, y_0) = 0, \, Q(x_0, y_0) = 0,$$

то точка $(x_0; y_0)$ є особливою точкою ДР.

Наведемо приклади поводження інтегральних кривих в околі особливої точки (Рис. 1).

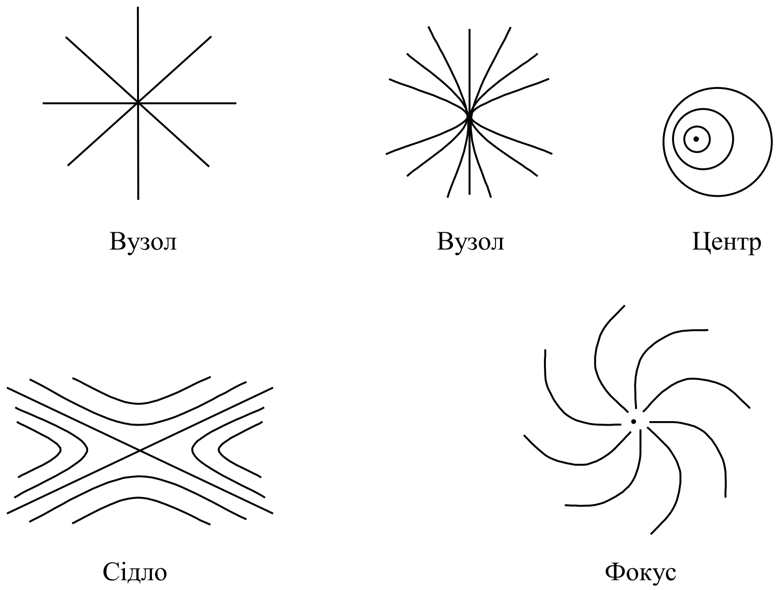

Рисунок – 1

Приклад. Розглянемо ДР $y'=\dfrac{x}{y},$ яка має особливу (0; 0). Розв’яжемо ДР $y'=\dfrac{x}{y},\ \ x-y\,y'=0,\ \left(x^2-y^2\right)'=0,\ x^2-y^2=c.$

Інтегральними кривими є гіперболи. Особлива точка (0; 0) є сідлом.

Розглянемо ДР $y'=f\left(x;y\right)$.

Функція $y=\varphi\left(x,C\right)$, що містить довільну сталу C, називається *загальним розв’язком ДР*, якщо функція $y=\varphi\left(x,C\right)$ є розв’язком ДР при довільному значенні сталої C, тобто $\dfrac{\partial\varphi\left(x,c\right)}{\partial x}\equiv f\left(x,\varphi\left(x,c\right)\right)$ і за рахунок вибору довільної сталої C можна розв’язати задачу Коші з довільними початковими умовами, тобто рівняння $y_0=\varphi\left(x_0,c\right)$ розв’язується відносно C. Розв’язок $y=\varphi\left(x,C_0\right)$ при фіксованому значенні сталої C називається *частинним розв’язком*.

Приклад. ДР $y'=2xy^2$ має загальний розв’язок $y=-\dfrac{1}{x^2+C}$

Справді, маємо тотожність:

$$\left(-\frac{1}{x^2+C}\right)'=2x\left(\frac{1}{x^2+C}\right)^2.$$

При довільних початкових значеннях $\left(x_0,\,y_0\right),\ y_0\neq 0$ знаходимо значення довільної сталої C

$$y_0=-\frac{1}{x_0^2+C}\Rightarrow C=-x_0^2-\frac{1}{y_0}.$$

Якщо довільна стала виражена через початкові дані, то загальний розв’язок називається *розв’язком у формі Коші*.

Задача знаходження розв’язків ДР називається *інтегруванням ДР*. Самий розв’язок називається також *інтегралом ДР*. Назва пояснюється розв’язуванням найпростішого ДР $y' = f(x) \Rightarrow y = \int f(x)dx.$

Загальний розв’язок може бути знайдений у неявній формі: $\varphi(x, y) = C.$ Тоді ця рівність називається *інтегралом ДР*. Функція $\varphi(x, y)$ також називається *інтегралом ДР*. Якщо загальний розв’язок ДР подається неявним рівнянням $\psi(x, y, C) = 0,$ то рівняння називається *загальним інтегралом ДР*.

Розв’яжемо диференціальне рівняння

$$y' = \frac{e^x}{2y + 3y^2}.$$

Рівняння можна записати у вигляді

$$2y\,y' + 3y^2 y' - e^x = 0 \quad \left(y^2 + y^3 - e^x\right)' = 0.$$

Звідси знаходимо інтеграл ДР $y^2 + y^3 - e^x = c.$

Розглянемо детальніше питання про особливі розв’язки. Точки, в яких існує не єдиний розв’язок ДР $y' = f(x, y),$ можуть бути точками розриву функцій $f(x, y),$ $f'_y(x, y),$ а також точками, в яких загальний інтеграл ДР $\psi(x, y, c) = 0$ не розв’язуваний відносно c, тобто $\psi'_c(x, y, c) = 0.$ Криві, в точках яких не виконані умови єдиності рішень, називають *дискримінантними кривими*. Однак не завжди дискримінантна крива визначає рішення ДР.