Лекція 27. Інтегрування диференціальних рівнянь першого порядку

План

1. Диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними.
2. Однорідні диференціальні рівняння
3. Диференціальні рівняння у повних диференціалах

1. Диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними.

Диференціальне рівняння виду

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \tag{1}$$

називається ДР з *відокремленими змінними*. Загальний розв'язок ДР подається так:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C, \tag{2}$$

а розв'язок задачі Коші з початковими умовами $x = x_0,\ y = y_0$ має вигляд

$$\int_{x_0}^{x} M(x)dx + \int_{y_0}^{y} N(y)dy = 0. \tag{3}$$

ДР з відокремленими змінними зводиться до квадратури, тобто до знаходження інтегралів.

Приклад. Знайдемо загальний розв'язок ДР $2xdx + 2ydy = 0.$ Інтегруючи, дістаємо інтеграл ДР $x^2 + y^2 = C.$ Інтегральними кривими є концентричні кола з центром у початку координат.

Диференціальне рівняння виду

$$N_1(y)M_1(x)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \tag{4}$$

називається ДР з *відокремлюваними змінними*, тобто рівнянням, що зводяться до ДР з відокремленими змінними.

Поділивши рівняння (4) на $N_1(y)\,M_2(x),$ дістанемо ДР з відокремленими змінними:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \tag{5}$$

Рівняння (4) має розв'язок $y = y_k,\ x = x_j,$ де $y = y_k,\ x = x_j$ є розв'язками рівнянь $N_1(y) = 0,\ M_2(x) = 0.$

Аналогічно ДР виду $y' = f_1(x)\,f_2(y)$ (6) є ДР з відокремлюваними змінними. Перепишемо його у вигляді:

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)\,f_2(y),\;\; \frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx.$$

Рівняння (6) має розв'язок виду $y=y_k$, де $f_2(y_k)=0$.

Приклад. Знайдемо загальний розв'язок ДР $y'=2xy^2$.

Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx}=2xy^2,\quad \frac{dy}{y^2}=2xdx,\quad \int\frac{dy}{y^2}=\int 2xdx$$

або

$$-\frac{1}{y}=x^2+C,\quad y=-\frac{1}{x^2+C}.$$

2. Однорідні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння називається *однорідним*, якщо його можна подати у вигляді

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{7}$$

Воно за допомогою заміни змінної $\frac{y}{x}=u,\ y=ux$ зводиться до ДР з відокремлюваними змінними $u'x+u=f(u),\ x\frac{du}{dx}=f(u)-u$, а знаходження розв'язку зводиться до квадратур $\int\frac{du}{f(u)-u}=\int\frac{dx}{x}$.

Приклад. Знайдемо загальний розв'язок ДР $y'=\frac{y}{x}$.

Узявши $y=ux$, дістанемо ДР і його загальний розв'язок $u'x+u=u,\ u'x=0,\ u=C,\ y=Cx.$

Приклад. Знайдемо загальний розв'язок ДР $y'=\frac{y^2}{x^2}$.

Візьмемо $y=ux$ і одержимо ДР для змінної

$$u'x+u=u^2,\ x\frac{du}{dx}=u^2-u,\ \frac{du}{u^2-u}=\frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи ДР з відокремленими змінними, знаходимо загальний розв'язок: $\int\frac{du}{u^2-u}=\int\frac{dx}{x},\ \ln\left|\frac{u-1}{u}\right|=\ln x+\ln C,\ \frac{u-1}{u}=Cx,\ u=\frac{1}{1-Cx},\ \frac{y}{x}=\frac{1}{1-Cx},\ y=\frac{x}{1-Cx}.$

Однорідне ДР $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ не змінюється при перетворенні подібності:

$$y=ky_1,\quad x=kx_1,\quad k=\text{const}. \tag{8}$$

ДР $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$ перетворюється на ДР $\frac{dky_1}{dkx_1}=f\left(\frac{ky_1}{kx_1}\right),\ \frac{dy_1}{dx_1}=f\left(\frac{y_1}{x_1}\right).$

При перетворенні подібності (8) інтегральні криві рівняння (7) знову переходять в інтегральні криві рівняння (7). Усі інтегральні криві однорідного ДР подібні з центром подібності в початку координат. Якщо будь-яка інтегральна крива, що лежить в деякому секторі, входить у початок координат, то всі інтегральні криві в цьому секторі теж входять у початок координат. Якщо одна із інтегральних кривих замкнена, то всі інтегральні криві замкнені.

3. Диференціальні рівняння у повних диференціалах

Диференціальне рівняння $du = 0$ або

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0,\ u = u(x, y) \tag{9}$$

називається *ДР у повних диференціалах*. Це ДР має інтеграл

$u(x, y) = C = \mathbf{const}.$ (10)

ДР виду

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{11}$$

є ДР у повних диференціалах, якщо виконується тотожність

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \tag{12}$$

При цьому знаходимо функцію $u(x, y)$ із рівнянь

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y),\quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y). \tag{13}$$

В окремому випадку можна скористатись формулою

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy. \tag{14}$$

Значення x_0, y_0 можуть бути довільними числами.

Розв’язок задач Коші з початковими умовами $x = x_0,\ y = y_0$ визначається рівнянням $u(x, y) = 0,$ де $u(x, y)$ подається формулами (14).

Приклад. Розв’яжемо ДР $(2x + 2y)dx + (2x - 2y)dy = 0$.

Перевіримо спочатку виконання умови (11):

$$M(x, y) = 2x + 2y,\ \ N(x, y) = 2x - 2y,\ \ \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 2,\ \ \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 2.$$

Умова (11) виконується, і знаходимо функцію $u(x, y)$ із рівнянь (13). При $x_0 = 0,\ \ y_0 = 0$ маємо $u(x, y) = \int_0^x 2x dx + \int_0^y (2x - 2y) = x^2 + 2xy - y^2.$

Отже, ДР має інтеграл $x^2 + 2xy - y^2 = C.$

Л. Ейлер довів, що для будь-якого ДР першого порядку

$$M\left(x,\ y\right)dx + N\left(x, y\right)\ dy = 0.$$

для якого не виконується умова (11), існує інтегрувальний множник $\mu = \mu(x, y)$ такий, що ДР $\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0$ є ДР у повних диференціалах. Із умови виду (11)

$$\frac{\partial\left(\mu M\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\mu N\right)}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} N - \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} M = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \tag{15}$$

шукаємо інтегрувальний множник μ, а потім інтегруємо рівняння (14).

Приклад. Знайдемо інтегрувальний множник для ДР

$$\left(x^2 - 2y\right)dx + \left(-x\right)dy = 0 .$$

Маємо: $M\left(x, y\right) = x^2 - 2y,\ \ N\left(x, y\right) = -x,\ \ \frac{\partial M}{\partial y} = -2,\ \frac{\partial N}{\partial x} = -1.$

Умова (11) не виконується. Розглядуване ДР не є рівнянням у повних диференціалах. Складемо рівняння (15).

Припустимо, що інтегрувальний множник μ залежить тільки від x. Дістанемо рівняння $\frac{d \ln \mu(x)}{dx} = \frac{1}{x},\ \ln \mu\left(x\right) = \ln|x|,\ \ \mu\left(x\right) = x.$ Домножимо початкове ДР на x і дістанемо рівняння в повних диференціалах: $\left(x^3 - 2xy\right)dx - x^2 dy = 0$, яке легко зінтегрувати:

$$\int_0^x x^3 dx + \int_0^y \left(-x^2\right)dy = C, \quad \frac{x^4}{4} - x^2 y = C.$$