

Лекція 16. Застосування похідної

План

1. Розкриття невизначеності виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ та $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$
2. Перетворення невизначеностей виду $(0 \cdot \infty)$; (0^0) ; (∞^0) ; (1^∞) ; $(\infty - \infty)$ до виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$
3. Формула Тейлора для многочлена
4. Формула Тейлора для функції. Різні форми залишкового члена
5. Розклад за формулою Маклорена функцій e^x ; $\sin x$; $\cos x$; $\ln(1+x)$.

1. Розкриття невизначеності виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ та $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Теорема 1 (Перше правило Лопіталя). Нехай функції $f(x), \varphi(x)$ є неперервними і диференційованими в деякому околі точки x_0 , за винятком, можливо, самої точки x_0 , причому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0, \quad \varphi'(x) \neq 0.$$

Тоді, якщо існує $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = k$, то обов'язково $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k$.

Теорема 2. Нехай функції $f(x), \varphi(x)$ визначені при $x > a$ є диференційованими на цій множині і $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$. Тоді, якщо існує

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}, \text{ то обов'язково } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Теорема 2 (Друге правило Лопіталя). Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені і диференційовні в околі точки x_0 і в цьому околі

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty, \quad \varphi'(x) \neq 0.$$

Тоді, якщо існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ і

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Приклад. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{2x}$.

Виконавши граничний перехід, дістанемо невизначеність вигляду $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Застосовуємо перше правило Лопітала:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 7x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \cos x}{2} = \frac{7}{2}.$$

2. Перетворення невизначеностей виду

$(0 \cdot \infty)$; (0^0) ; (∞^0) ; (1^∞) ; $(\infty - \infty)$ до виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Правило Лопітала можна застосувати тільки для розкриття невизначеностей виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. При розкритті інших типів невизначеностей їх перетворюють до одного з цих видів.

Невизначеність виду $(0 \cdot \infty)$. Нехай $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = \infty$.

Потрібно знайти $\lim_{x \rightarrow a} (u(x) \cdot v(x))$. Це невизначеність типу $(0 \cdot \infty)$. Якщо даний вираз записати у вигляді

$$\lim_{x \rightarrow a} u \cdot v = \lim_{x \rightarrow a} \frac{u}{\frac{1}{v}} \text{ або } \lim_{x \rightarrow a} u \cdot v = \lim_{x \rightarrow a} \frac{v}{\frac{1}{u}},$$

то при $x \rightarrow a$ дістанемо невизначеність відповідно вигляду

Невизначеність виду (0^0) ; (∞^0) ; (1^∞) . Нехай маємо функцію $u(x)^{v(x)}$.

При $x \rightarrow a$ (a — скінченне або нескінченне) можливі три випадки:

а) $u \rightarrow 0$, $v \rightarrow 0$ маємо невизначеність виду (0^0) ;

б) $u \rightarrow \infty$, $v \rightarrow 0$ дістанемо невизначеність (∞^0) ;

в) $u \rightarrow 1$, $v \rightarrow \infty$ маємо невизначеність виду (1^∞) .

Ці невизначеності за допомогою логарифмування зводяться до невизначеності вигляду $(0 \cdot \infty)$. Справді, позначимо дану функцію через y ,

тобто візьмемо $y = u^v$. Прологарифмувавши цю рівність, дістанемо $\ln y = v \cdot \ln u$ ($u > 0$).

Легко перевірити, що при $x \rightarrow a$ добуток $v \cdot \ln u$ буде невизначеністю $(0 \cdot \infty)$ для всіх трьох випадків.

Відповідно до підпункту 1 розкриємо невизначеність $(0 \cdot \infty)$, тобто знайдемо границю $\lim_{x \rightarrow a} \ln y = k$ (k — скінченне або ∞).

$$\text{Звідси } \lim_{x \rightarrow a} y = \lim_{x \rightarrow a} u^v = e^k.$$

Невизначеність $(\infty - \infty)$. Якщо функції $u(x) \rightarrow \infty$, $v(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a$ (a — скінченне або нескінченне), то різниця $(u - v)$ при $x \rightarrow a$ дає невизначеність $(\infty - \infty)$. Остання з допомогою алгебраїчних перетворень зводиться до невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Приклад. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$.

Маємо невизначеність виду $(\infty - \infty)$. Алгебраїчним перетворенням приведемо цю невизначеність до невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$, а потім двічі застосуємо правило Лопіталія:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

3. Формула Тейлора для многочлена

Як відомо, многочленом n -го степеня називають функцію виду

$$P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Запис многочлена $P_n(x)$ у вигляді

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)^2 + C_3(x - x_0)^3 + \dots + C_n(x - x_0)^n \quad (1)$$

називають розкладом многочлена за степенями $(x - x_0)$.

Покладемо в рівності (1) $x = x_0$, тоді одержимо $P_n(x_0) = C_0$.

Продиференціюємо рівність (1)

$$P'_n(x) = C_1 + 2C_2(x - x_0) + 3C_3(x - x_0)^2 + \dots + nC_n(x - x_0)^{n-1}. \quad (2)$$

Покладаючи в рівності (2) $x = x_0$ знайдемо $P'_n(x_0) = C_1$. Продиференціюємо рівність (2)

$$P''_n(x) = 2 \cdot 1C_2 + 3 \cdot 2C_3(x - a) + \dots + n(n-1)C_n(x - a)^{n-2}. \quad (3)$$

Покладаючи в рівності (3) $x = x_0$ знайдемо $P''_n(x_0) = 2C_2$. Продовжуючи аналогічно будемо мати

$$6C_3 = P'''_n(x_0),$$

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1c_4 = P^{(4)}_n(x_0),$$

$$n!c_n = P^{(n)}_n(x_0).$$

Як бачимо, коефіцієнти в ряді (1) обчислюються за формулами

$$C_0 = P_n(x_0), C_1 = P'_n(x_0) = \frac{P'_n(x_0)}{1!}, C_2 = \frac{P''_n(x_0)}{2} = \frac{P''_n(x_0)}{2!}, C_3 = \frac{P'''_n(x_0)}{3!}, \dots,$$

$$c_n = \frac{P^{(n)}_n(x_0)}{n!}.$$

Завдяки цьому рівність (1) можна записати у вигляді

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P'_n(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P''_n(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{P'''_n(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{P^{(n)}_n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (4)$$

Рівність (4) називають *формулою Тейлора для многочлена*.

4. Формула Тейлора для функції. Різні форми залишкового члена

Візьмемо деяку функцію $f(x)$, визначену в околі точки x_0 і таку, що в точці x_0 має похідні до $(n + 1)$ -го порядку. Тоді по аналогії з формулою Тейлора для многочлена можемо скласти многочлен

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

В загальному випадку цей многочлен не буде рівний $f(x)$, тому можна записати $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, або у розгорнутому вигляді

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n(x). \quad (5)$$

Доданок $R_n(x)$ називають залишковим членом. Його шукають з формули

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x-x_0)), \text{ де } 0 < \Theta < 1.$$

Підставивши $R_n(x)$ в рівність (5) отримуємо формулу Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x-x_0)), \quad (0 < \Theta < 1) \quad (6)$$

Узявши у формулі $x_0 = 0$, дістанемо формулу Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\Theta x). \quad (7)$$

5. Розклад за формулою Маклорена функцій e^x ; $\sin x$; $\cos x$; $\ln(1+x)$.

Розклад функції $f(x) = e^x$. Послідовно диференціюючи функцію e^x ,

дістаємо:

$$f(x) = e^x, \quad f(0) = 1;$$

$$f'(x) = e^x, \quad f(0) = 1;$$

.....

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad f(0) = 1.$$

Підставляючи здобуті вирази у формулу Маклорена, маємо:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\Theta x}, \quad 0 < \Theta < 1.$$

При $x = 1$ маємо формулу для знаходження наближеного значення числа e :

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{8!} \approx 2,71828,$$

при цьому допущена похибка не перевищує числа $\frac{3}{9!}$ або 0,00001.

Розклад функції $f(x) = \sin x$. Знаходимо послідовно похідні від $f(x) = \sin x$:

$$f(x) = \sin x, \quad f(0) = 0;$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad f'(0) = 1;$$

.....,

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi n}{2};$$

$$f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(n+1)}(\Theta x) = \sin\left(\Theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(0 < \Theta < 1)$$

Підставляючи здобуті значення у формулу Маклорена, дістаємо розклад функції $f(x) = \sin x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{x^n}{n!} \sin\frac{\pi n}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin\left(\Theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Розклад функції $f(x) = \cos x$. Знаходячи значення послідовних похідних при $x = 0$ від функції $f(x) = \cos x$ та підставляючи у формулу Маклорена, дістаємо:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{x^n}{n!} \cos \frac{\pi n}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos \left(\Theta x + (n+1) \frac{\pi}{2} \right), \quad |\Theta x| < |x|.$$

Розклад функції $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{x}{1+\Theta x} \right)^{n+1}, \quad |\Theta x| < |x|.$$