Лекція 15. Похідні функції. Диференціал

План

1. Таблиця похідних

2. Диференціал функції та його застосування

3. Похідні і диференціали вищих порядків

4. Основні теореми диференціального числення

1. Таблиця похідних

За аналогією з попередніми прикладами можна дістати похідні від основних елементарних функцій.

<u>Таблиця основних елементарних функцій</u>

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$ ($n -$ будь-яке дійсне число)
2. $(a^x)' = a^x lna \quad (a > 0, a \neq 1)$
3. $(e^x)' = e^x$
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{xlna} \; (a > 0, a \neq 1)$
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
6. $(\sin x)' = \cos x$
7. $(\cos x)' = -\sin x$
8. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

<u>*Приклад.*</u> Обчислити похідну функції $y = -4\sin x$.

<u>*Розв'язання.*</u> $y' = (-4\sin x)' = -4(\sin x)' = -4\cos x$.

<u>*Приклад.*</u> Обчислити похідну функції $y = \sin\frac{\pi}{8}$.

Розв'язання. $y' = \left(\sin\frac{\pi}{8}\right)' = 0.$

Приклад. Обчислити похідну функції $y = x^3 - \frac{1}{x^4} + 6\sqrt[3]{x^2}$.

Розв'язання. $y = x^3 - \frac{1}{x^4} + 6\sqrt[3]{x^2} = x^3 - x^{-4} + 6x^{2/3}$. Знайдемо похідну

$$y' = 3x^2 + 4x^{-5} + 6 \cdot \frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{3} = 3x^2 + \frac{4}{x^5} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}.$$

2. Диференціал функції та його застосування

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0. Тоді її приріст у цій точці можна подати у вигляді $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$,

де $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отже, доданок $A\Delta x$ є головною частиною приросту функції, яка лінійно залежить від Δx.

Диференціалом функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається головна частина приросту функції в цій точці, яка лінійно залежить від Δx.

Диференціал функції позначається так: $dy = A\Delta x$.Враховуючи, що $A = f'(x_0)$, маємо $dy = f'(x_0)\Delta x$. Диференціалом незалежної змінної x називається її приріст: $dx = \Delta x$. Отже,

$$dy = f'(x_0)dx.$$

Із останньої формули випливає, що похідну $f'(x_0)$ можна обчислити як відношення диференціалів:

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}.$$

Оскільки диференціал dy функції $y = f(x)$ є головною частиною її приросту, то це дає можливість застосувати диференціал функції в наближених обчисленнях: із наближеної рівності $\Delta y = dy$, тобто

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)dx, f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx. \quad (15.1)$$

Приклад. Знайти наближено $\sqrt{4{,}001}$. Розглянемо функцію $y = \sqrt{x}$. Покладемо $x_0 = 4,\ \Delta x = 0{,}001$.Тоді $\sqrt{4{,}001} = \sqrt{x_0 + \Delta x}$. Далі маємо

$$f(x_0) = \sqrt{4} = 2, f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

Отже, $\sqrt{4{,}001} \approx 2 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}001 = 2{,}00025.$.

Нехай тепер маємо складену функцію $y = f(u), u = \varphi(x)$, де $f(u), \varphi(x)$ диференційовані функції в точках x_0 і $u_0 = \varphi(x_0)$. Тоді

$$dy = (f(\varphi(x_0)))'_x dx.$$

Так як

$$(f(\varphi(x_0)))'_x = f'_u(u_0)u'_x, \text{ то } dy = f'_u(u_0)u'_x dx.$$

Оскільки $u'_x dx = du$, то маємо $dy = f'_u(u_0)du$.

Таким чином, якщо функція складена, то форма диференціалу не змінює свого виду. Цю властивість називають *інваріантністю форми диференціалу*.

3. Похідні і диференціали вищих порядків

Якщо функція $y = f(x)$ *диференційовна на* деякому *інтервалі* (тобто має похідну в кожній точці інтервалу), то за означенням *похідна другого порядку (друга похідна)* цієї функції знаходиться за формулою $y'' = (y')'$. Аналогічно *похідна третього порядку (третя похідна)* $y''' = (y'')'$ і т.д.

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в кожній точці x деякого проміжку X. Її диференціал першого порядку $dy = y'(x)dx$ є функцією двох змінних: аргументу x і диференціала dx. Нехай $f'(x)$ також диференційована в кожній точці x деякого проміжку X. Будемо розглядати у виразі $dy = f'(x)dx$ диференціал dx як постійний множник. Тоді

$$d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dxdx = f''(x)dx^2.$$

Диференціал $d(dy)$ називається диференціалом другого порядку і позначається d^2y. Отже, $d^2y = f''(x)dx^2$.

Диференціал $d(d^{n-1}y)$ від диференціала $d^{n-1}y$, взятий при постійному dx називається диференціалом n –го порядку функції $y = f(x)$ і позначається $d^n y$. Методом математичної індукції можна встановити, що $d^n y = = f^{(n)}(x)(dx)^n$. Із останньої формули випливає, що

$$y^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

4. Основні теореми диференціального числення

Теорема Ферма. *Нехай функція* $f(x)$ *визначена на інтервалі* (a, b) *і в деякій точці* $x_0 \in (a, b)$ *має найбільше або найменше значення. Тоді, якщо в цій точці існує похідна* $f'(x_0)$, *то вона рівна нулю, тобто* $f'(x_0)=0$.

Теорема Ролля. *Якщо функція* $f(x)$ *визначена на відрізку* $[a, b]$ *і вона*

1) неперервна в кожній точці відрізка $[a, b]$,

2) диференційована на інтервалі (a, b),

3) на кінцях відрізка $[a, b]$ *приймає рівні значення* $f(a) = f(b)$, *то існує точка* $C \in (a, b)$ *така, що* $f'(C)=0$.

Теорема Лагранжа. *Якщо функція* $f(x)$ *визначена на відрізку* $[a, b]$ *і вона*

1) неперервна в кожній точці відрізка $[a, b]$,

2) диференційована на інтервалі (a, b), *то існує точка* $C \in (a, b)$ *така, що*

$$f'(C) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Теорема Коші. *Якщо функції* $f(x)$ *і* $g(x)$

1) неперервні на відрізку $[a, b]$,

2) диференційовані на інтервалі (a, b), *і* $g'(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$, *то існує точка* $C \in (a, b)$ *така, що*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(C)}{g'(C)}.$$