

Лекція 8. Пряма у просторі

План

1. *Різні види рівнянь прямої*
2. *Кут між двома прямими*
3. *Кут між прямою і площиною*

1. Різні види рівнянь прямої

Залежно від способу задання прямої в просторі можна розглядати різні її рівняння.

1. Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно вектору $\vec{s}(m, n, p)$. Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка прямої, тоді $\overline{M_0M} \parallel \vec{s}$ і пряма лінія на площині може бути задана векторним рівнянням у параметричній формі

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{s}t, \quad (1)$$

де \vec{s} – напрямний вектор прямої l , \vec{r}_0 – радіус-вектор фіксованої точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямій, $\vec{r}(t)$ – радіус-вектор довільної точки на прямій, t – параметр.

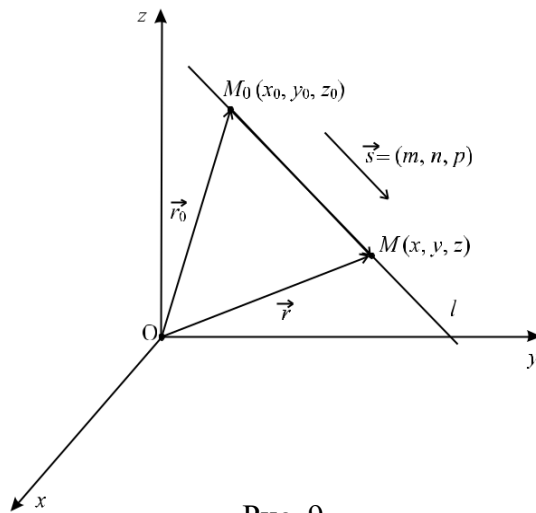


Рис. 9

2. Із рівняння (1) отримуємо три скалярні рівняння:

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt, \quad (2)$$

які називаються *параметричними рівняннями прямої*.

3. Розв'язуючи рівняння системи (2) відносно t та прирівнюючи отримані співвідношення, приходимо до *канонічних рівнянь прямої*:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}. \quad (3)$$

Якщо $m = 0$, $n \neq 0$, $p \neq 0$, то напрямний вектор \vec{s} перпендикулярний до осі Ox , тому рівняння

$$\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

визначає пряму, перпендикулярну до осі Ox . Аналогічно рівняння, в яких лише $n = 0$ або $p = 0$, визначають прямі, перпендикулярні до осі Oy або Oz .

Якщо $m = n = 0$, $p \neq 0$, або $m = p = 0$, $n \neq 0$, або $n = p = 0$, $m \neq 0$, то рівняння (3) визначають прямі, відповідно паралельні осям Oz , Oy , Ox .

4. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ записується у вигляді

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \quad (4)$$

5. Дві площини, що перетинаються

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \quad (5)$$

де $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, \vec{n}_1 не паралельний до \vec{n}_2 однозначно задають пряму. Рівняння (5) називається *загальним рівнянням прямої в просторі*. Направний вектор цієї прямої

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad (6)$$

а для знаходження координат точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ одну з координат, наприклад $x = x_0$, беруть довільною, а дві інші визначають із системи

$$\begin{cases} B_1y + C_1z = -D_1 - A_1x_0, \\ B_2y + C_2z = -D_2 - A_2x_0. \end{cases}$$

2. Кут між двома прямими

Розглянемо випадки взаємного розташування двох прямих в просторі. Дві прямі в просторі можуть бути мимобіжними або перетинатися, або паралельними, або співпадати. У будь-якому випадку вони утворюють деякий кут (між їх напрямними векторами \vec{s}_1 і \vec{s}_2). Якщо прямі задані канонічними рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{і} \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2} \quad (7)$$

то величина кута φ між ними визначається за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

Тепер можна записати умову перпендикулярності прямих:

$$\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \quad \text{або} \quad m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Умова паралельності прямих

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Необхідною і достатньою умовою перетину непаралельних прямих, заданих рівняннями (7):

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Якщо дана умова не виконується, то прямі (7) є мимобіжними.

3. Кут між прямою і площиною

Кутом між прямою і площиною називається кут між прямою l і її ортогональною проекцією на площину l' (рис. 10).

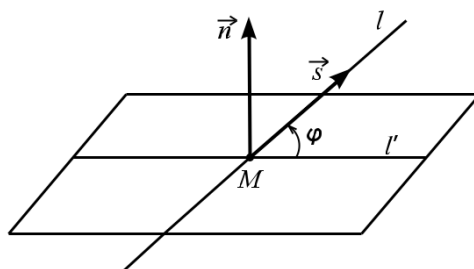


Рис. 10

Величина кута φ між прямою $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ і площиною

$Ax + By + Cz + D = 0$ обчислюється за формулою

$$|\cos(\vec{n}, \vec{s})| = \sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

Умова паралельності прямої і площини: якщо пряма паралельна площині, то вектори \vec{n} і \vec{s} перпендикулярні, тому

$$\vec{n} \cdot \vec{s} = 0 \text{ або } Am + Bn + Cp = 0.$$

Умова перпендикулярності прямої і площини: якщо пряма перпендикулярна площині, то вектори \vec{n} і \vec{s} паралельні, тому

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Розглянемо детальніше випадки взаємного розташування прямої і площини. Пряма (3) і площина $Ax + By + Cz + D = 0$ можуть перетинатися, бути паралельними або пряма може лежати в площині.

Перейдемо від канонічних рівнянь (3) до параметричних (2) і підставимо значення x, y, z з рівнянь (2) в рівняння площини. Отримаємо рівняння відносно невідомого параметра t :

$$\begin{aligned} A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D &= 0 \\ (Am + Bn + Cp)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Можливі випадки:

а) При $Am + Bn + Cp \neq 0$ рівняння має єдиний розв'язок:

$$t = -Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D / Am + Bn + Cp.$$

Підставивши це значення t в параметричні рівняння прямої (2), знайдемо координати точки перетину M (рис. 10).

б) При $Am + Bn + Cp = 0$ і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ рівняння (8) не має розв'язку, пряма не має спільних точок з площиною.

в) При $Am + Bn + Cp = 0$ і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ будь-яке t є розв'язком рівняння (8), тобто будь-яка точка прямої належить площині. Це і є *умови приналежності прямої і площини.*