

Лекція 7. Площина в просторі

План

1. Різні види рівняння площини

2. Кут між двома площинами. Умова паралельності і перпендикулярності двох площин

1. Різні види рівняння площини

Нехай в прямокутній системі координат $Oxyz$ задано площину Π точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і вектором $\vec{n} = (A, B, C)$, перпендикулярним до цієї площини. Виберемо на площині Π довільну точку $M(x, y, z)$. При будь-якому положенні точки M вектори \vec{n} і $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ є взаємно перпендикулярними, тому їх скалярний добуток рівний нулю

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0; \quad (1)$$

(1) – рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і має вектор нормалі $\vec{n} = (A, B, C)$. Або

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (2)$$

де $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Рівнянн (2) – загальне рівняння площини. Вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ – вектор нормалі. Можливі випадки:

- а) $D = 0$ – площина проходить через початок координат;
- б) $C = 0$ – площина паралельна осі Oz ;
- в) $C = D = 0$ – площина проходить через вісь Oz ;
- г) $B = C = 0$ – площина паралельна площині Oyz .

Рівняння площини у відрізках на осях

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Рівняння площини, що проходить через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Кут між двома площинами. Умова паралельності і перпендикулярності двох площин

Величину кута φ між площинами $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ обчислюють

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

де $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ – нормальні вектори даних площин.

Умова перпендикулярності двох площин

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Умова паралельності двох площин

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Дві площини збігаються, якщо виконується умова

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Приклад. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3; -1; 2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (2; 4; -3)$.

Розв'язання. Рівняння площини має вигляд

$$2(x - 3) + 4(y + 1) + (-3)(z - 2) = 0,$$

$$2x - 6 + 4y + 4 - 3z + 6 = 0,$$

$$2x + 4y - 3z + 4 = 0.$$

Приклад. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(1; 4; -3)$ паралельно векторам $\vec{s}_1 = (2; -3; -1)$, $\vec{s}_2 = (-3; 2; 0)$.

Розв'язання. Рівняння площини запишеться

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 4 & z - (-3) \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Безпосереднім обчисленням матимемо шукане рівняння площини

$$2x + 3y - 5z - 29 = 0.$$