РОЗДІЛ ІІ. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Лекція 4. Вектори та операції над ними

План

1. Основні поняття

2. Вектори в координатах

1. Основні поняття

Вектором називається напрямлений відрізок, тобто відрізок, для якого вказано початок A і кінець B. Позначення вектора: $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$.

Довжиною (модулем) вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка, яким він зображається. Позначення: $|\overrightarrow{AB}|, |\vec{a}|$.

Вектор $\vec{a}$ називається *одиничним*, якщо $|\vec{a}| = 1$. Вектор, початок та кінець якого співпадають, називається *нульовим* вектором. Позначення: $\vec{0}$.

Вектори, що лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називаються *колінеарними*. Три вектори, що лежать в одній площині або у паралельних площинах, називаються *компланарними.* Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають *рівними*, якщо вони однаково напрямлені та мають рівні модулі.

Добутком вектора $\vec{a}$ на число t називають вектор $\vec{c}$, що:

1) $|\vec{c}| = |t||\vec{a}|$;   2) $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$, якщо $t > 0$ та $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{a}$, якщо $t < 0$.

Сумою векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, проведений з початку вектора $\vec{a}$ до кінця вектора $\vec{b}$, при умові, що кінець вектора $\vec{a}$ співпадає з початком вектора $\vec{b}$ (правило трикутника).

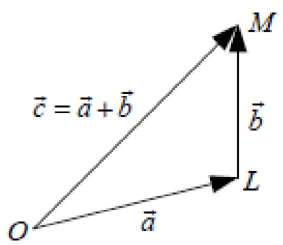

Рис. 2

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, то суму $\vec{a}+\vec{b}$ можна знайти за правилом паралелограма, яке ілюструється наступним рисунком:

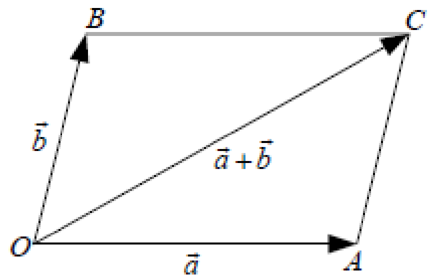

Рис. 3

Різницею векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають суму векторів $\vec{a}$ та $(-1)\vec{b}$, тобто

$$\vec{a}-\vec{b}= \vec{a}+(-1)\,\vec{b}.$$

2. Вектори в координатах

Упорядкована трійка одиничних попарно ортогональних векторів називається *ортонормованим базисом.* Позначають ортонормований базис через вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, що за напрямом збігаються з осями *Ox*, *Oy*, *Oz*.

Довільний вектор $\vec{a}$ можна подати у вигляді

$$\vec{a}=a_x\,\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k} \text{ або } \vec{a}=\left(a_x;\ a_y;\ a_z\right).$$

Якщо точка $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ – початок вектора, а точка $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ – його кінець, то

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1).$$

Довжину вектора $\vec{a}=\left(a_x;\ a_y;\ a_z\right)$ шукають

$$|\vec{a}|=\sqrt{{a_x}^2+{a_y}^2+{a_z}^2}.$$

Вектори $\vec{a}=\left(a_x;\ a_y;\ a_z\right)$ і $\vec{b}=\left(b_x;\ b_y;\ b_z\right)$ колінеарні тоді і лише тоді, коли їх відповідні координати пропорційні.

Вектори $\vec{a}=\left(a_x;\ a_y;\ a_z\right)$, $\vec{b}=\left(b_x;\ b_y;\ b_z\right)$, $\vec{c}=\left(c_x;\ c_y;\ c_z\right)$ компланарні тоді і лише тоді, коли

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Для векторів $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z), \vec{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$ та $\alpha = const$ виконується:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z);$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z);$$

$$\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha a_x;\ \alpha a_y;\ \alpha a_z).$$

Напрямними косинусами вектора $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$ називають косинуси кутів α, β, γ, які вектор $\vec{a}$ утворює з додатними напрямами осей координат:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}};\ \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}}.$$

Виконується співвідношення

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Ортом $\overrightarrow{a_0}$ *вектора* $\vec{a}$ називають одиничний вектор, координатами якого є напрямні косинуси: $\overrightarrow{a_0} = (\cos\alpha;\ \cos\beta; \cos\gamma)$. Виконується $\overrightarrow{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Нехай задано вектори $\vec{a}$ і $\overrightarrow{AB}$. *Проекцію вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на вектор* $\vec{a}$ (позначення $\text{пр}_{\vec{a}}\overrightarrow{AB}$) обчислюють

$$\text{пр}_{\vec{a}}\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\varphi,$$

де φ – кут між $\vec{a}$ і $\overrightarrow{AB}$.

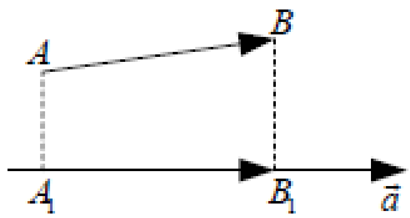

Рис. 4

Приклад Обчислити довжину вектора $\vec{a} = (6; 3; \ -2)$ і його напрямні косинуси.

Розв'язання. Довжина вектора $|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-2)^2} = 7;$

$$\cos\alpha = \frac{6}{7}; \cos\beta = \frac{3}{7}; \cos\gamma = \frac{-2}{7}.$$

Приклад. Перевірити колінеарність векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо

$$\vec{a} = (3; 2; -4), \vec{b} = (-6; -4; 8).$$

Розв'язання. Вектори колінеарні, якщо їх координати пропорційні, тобто

$$\frac{3}{-6} = \frac{2}{-4} = \frac{-4}{8}; \ -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Отже, вектори колінеарні.