

## РОЗДІЛ VII. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

### Тема 14. Невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування

#### Теоретичні відомості

Невизначеним інтегралом  $\int f(x)dx$  функції  $f(x)$  (на проміжку  $X$ ) називають вираз  $F(x) + C$ , де  $F(x)$  – одна з первісних функції  $f(x)$ , тобто  $F'(x) = f(x)$   $x \in X$ ;  $C$  – довільна стала.

#### Таблиця основних невизначених інтегралів

- |  |  |
|--|--|
| 1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq 1$                                   | 10. $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$                                   |
| 2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$  | 11. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right  + C, a > 0$ |
| 3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1.$                             | 12. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left  \frac{x-1}{x+1} \right  + C$           |
| 4. $\int e^x dx = e^x + C$   | 13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C, a > 0$        |
| 5. $\int \cos x dx = \sin x + C$   | 14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C$                           |
| 6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$  | 15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln x + \sqrt{x^2+a}  + C$                             |
| 7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$                                | 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln x + \sqrt{x^2+1}  + C$                             |
| 8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$                              |  |
| 9. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a > 0$ |  |

#### Безпосереднє інтегрування

Безпосереднє інтегрування невизначених інтегралів ґрунтується на тотожних перетвореннях підінтегральної функції та властивостях невизначеного інтеграла.

#### *Властивості невизначеного інтеграла*

1.  $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx, k = \operatorname{const}, k \neq 0.$
2.  $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$  (Ця властивість узагальнюється на довільне скінченне число доданків)
3. Якщо  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , то для будь-яких сталих  $k, b$  ( $k \neq 0$ )

$$\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C.$$

### Заміна змінної

Обчислення невизначених інтегралів методом заміни змінної ґрунтується на формулі

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C,$$

де  $F(x)$  – первісна  $f(x)$ ;  $\varphi'(x)$  – похідна функції  $\varphi(x)$ .

### Інтегрування частинами

Обчислення невизначених інтегралів методом інтегрування частинами полягає у використанні формули

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

де  $u, v$  – функції змінної  $x$ ;  $du = u'(x)dx$ ,  $dv = v'(x)dx$ .

### **Приклади розв'язування вправ**

**Приклад 1.** Безпосереднім інтегруванням обчислити:

а)  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ ; б)  $\int \frac{dx}{2^x}$ ; в)  $\int \frac{dx}{x^2+9}$ .

**Розв'язання.**

а)  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C.$

б)  $\int \frac{dx}{2^x} = \int \frac{1}{2^x} dx = \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln \frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{2^x \ln 2} + C.$

в)  $\int \frac{dx}{x^2+9} = \int \frac{dx}{x^2+3^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C.$

**Приклад 2.** Використовуючи властивості невизначеного інтеграла, знайти:

а)  $\int \frac{3dx}{\cos^2 x}$ ; б)  $\int \frac{dx}{4-x^2}$ ; в)  $\int \left(4 - \frac{3}{x} + \frac{e^x}{2}\right) dx.$

**Розв'язання.**

а)  $\int \frac{3dx}{\cos^2 x} = 3 \int \frac{dx}{\cos^2 x} = 3 \operatorname{tg} x + C.$

б)  $\int \frac{dx}{4-x^2} = \int \frac{dx}{-(x^2-4)} = -\int \frac{dx}{x^2-2^2} = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C.$

$$\begin{aligned} \text{в)} \int \left(4 - \frac{3}{x} + \frac{e^x}{2}\right) dx &= \int 4 dx - \int \frac{3}{x} dx + \int \frac{1}{2} e^x dx = 4 \int dx - 3 \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int e^x dx = \\ &= 4x - 3 \ln|x| + 0,5e^x + C. \end{aligned}$$

**Приклад 3.** Знайти невизначені інтеграли:

а)  $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$ ; б)  $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$ .

**Розв'язання.**

а)  $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1+\cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) dx = \frac{1}{2} (x + \sin x) + C.$

б)  $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$ . Спочатку виділимо в знаменнику повний квадрат відносно  $x$ :  $x^2 + 4x + 13 = (x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2) + 9 = (x + 2)^2 + 9.$

Обчислюємо інтеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13} = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 9} = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 3^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x + 2}{3} + C.$$

**Приклад 4.** Використовуючи заміну змінної знати:

а)  $\int \sin^2 \cos x dx$ ; б)  $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx.$

**Розв'язання.**

а)  $\int \sin^2 \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + C = \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$

б)  $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{array} \right| = \int \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} (\operatorname{tg} x)^{\frac{3}{2}} + C.$

**Приклад 5.** Обчислити невизначені інтеграли:

а)  $\int x \cos x dx$ ; б)  $\int (3x - 1)e^x dx.$

**Розв'язання.**

а) Покладемо  $u = x, dv = \cos x dx$ . Тоді  $du = (x)' dx = dx, v = \int dv = \sin x$

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= x \sin x - \int \sin x dx = \\ &= x \sin x - (-\cos x) + C = x \sin x + \cos x + C. \end{aligned}$$

б)  $\int (3x - 1)e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = 3x - 1 \\ dv = e^x dx \\ du = 3dx \\ v = e^x \end{array} \right| = (3x - 1)e^x - \int 3e^x dx =$   
 $= (3x - 1)e^x - 3e^x + C.$

## Питання для самоперевірки

1. Що називають невизначеним інтегралом?
2. Записати основні властивості невизначеного інтеграла.
3. Які методи інтегрування існують?

### Вправа

1. Безпосереднім інтегруванням обчислити:

а)  $\int \sqrt[3]{x} dx$ ; б)  $\int \frac{dx}{x^2+4}$ ; в)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ .

**Відповідь:** а)  $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$ ; б)  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$ ; в)  $\ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$ .

2. Знайти невизначені інтеграли:

а)  $\int (9x^5 - \sqrt[5]{x}) dx$ ; б)  $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1}$ ; в)  $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$ ; г)  $\int \frac{dx}{9-5x^2}$ ; д)  $\int \frac{10dx}{x^2-8x-9}$ .

**Відповідь:** а)  $\frac{3}{2}x^6 - \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}} + C$ ; б)  $\frac{1}{3}x^3 - x + \operatorname{arctg} x + C$ ; в)  $-\operatorname{ctg} x - x + C$ ,

г)  $-\frac{1}{6\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5}x-3}{\sqrt{5}x+3} \right| + C$ ; д)  $\ln \left| \frac{x-9}{x+1} \right| + C$ .

3. Використовуючи заміну змінної знати:

а)  $\int 2^{\sin x} \cos x dx$ ; б)  $\int \frac{(2x+5)}{\sqrt{x^2+5x+9}} dx$ ; в)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x-4}}$ ; г)  $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}}$ .

**Відповідь:**

а)  $\frac{1}{\ln 2} 2^{\sin x} + C$ ; б)  $2\sqrt{x^2+5x+9} + C$ ; в)  $\ln|\ln x + \sqrt{\ln^2 x-4}| + C$ ;

г)  $-\frac{1}{2(\arcsin x)^2} + C$ .

4. Обчислити невизначені інтеграли:

а)  $\int (3-4x) \cos 2x dx$ ; б)  $\int x^2 e^x dx$ ; в)  $\int x \ln x dx$ .

**Відповідь:** а)  $\frac{3-4x}{2} \sin 2x - \cos 2x + C$ ; б)  $(x^2 - 2x + 2)e^x + C$ ;

в)  $\frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) + C$ .