Тема 13. Застосування диференціального числення до побудови графіка функції

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{2x}$.

Розв’язання

Виконавши граничний перехід, дістанемо невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 7x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{7\cos x}{2}=\frac{7}{2}.$$

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{2x^3+7x+5}$.

Розв’язання

Виконання граничного переходу приводить до невизначеності виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{2x^2+7x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+3x+1\right)'}{\left(2x^3+7x+5\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{6x^2+7}=$$

(виконання граничного переходу знову приводить до невизначеності виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, а тому застосовуємо правило Лопіталя повторно):

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)'}{\left(6x^2+7\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{12x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{6}\cdot 0=0.$$

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3\ln x\right)$.

Розв’язання

Тут маємо невизначеність вигляду $[0\cdot\infty]$. Зобразимо добуток функції у вигляді частки, а потім, отримавши невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3\ln x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(x^{-3}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}x^3=0.$$

Приклад 4. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$.

Розв'язання

Це невизначеність виду $[0^0]$. Позначимо функцію, що стоїть під знаком границі, через *y*, тобто $y=(\sin x)^x$, і прологарифмуємо її:

$$\ln y = x\ln\sin x = \frac{\ln\sin x}{x^{-1}}.$$

Обчислимо границю логарифма даної функції. Тут маємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sin x\left(-x^{-2}\right)} = -\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\sin x} = 0.$$

Звідси $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x = e^0 = 1$.

Приклад 5. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

Розв'язання

При $x\to 1$ маємо невизначеність $\left[1^\infty\right]$.

$$y = x^{\frac{1}{x-1}},\quad \ln y = \frac{\ln x}{x-1};\quad \lim_{x\to 1}\ln y = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Звідси $\lim\limits_{x\to 1} y = \lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = e^1 = e$.

Приклад 6. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.

Розв'язання

Маємо невизначеність виду $[\infty-\infty]$. Алгебраїчним перетворенням приведемо цю невизначеність до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$, а потім двічі застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

Задачі

1. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі функцій:

1. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{e\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin bx}}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

9. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{c^x-d^x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cos x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x\sqrt{1-x^2}}$.

14. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x\ln(x-a)}{\ln\left(e^x-e^a\right)}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}-e^x}{\operatorname{tg} x-x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{2}-x-1}{\cos x+\dfrac{x^2}{2}-1}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)^4-4x+2x^2-\dfrac{4}{3}x^3+x^4}{6\sin x-6x+x^3}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$.

22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-x)+\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

23. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^n e^{-x}\right)$.

Дослідження функцій на монотонність, екстремум. Найбільше та найменше значення функції на сегменті.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Дослідити на максимум і мінімум функцію $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$.

1. Знаходимо першу похідну $y'=x^2-4x+3$.

2. Знаходимо дійсні корені рівняння $x^2-4x+3=0$ $\left(f'(x)=0\right)$. Звідки $x_1=1,\quad x_2=3$.

Похідна скрізь неперервна. Значить, інших критичних точок для заданої функції не існує.

3. Досліджуємо критичні значення. Для цього область визначення функції $(-\infty,\ +\infty)$ здобутими критичними точками розбиваємо на три інтервали $(-\infty,\ 1)$, (1, 3), (3, $+\infty$).

Виберемо в кожному інтервалі по одній точці і обчислимо значення похідної в цих точках:

$$x=0\in(-\infty,1),\quad y'(0)=3>0;$$

$$x=2\in(1,3),\quad y'(2)=2^2-4\cdot2+3=-1<0;$$

$$x=4\in(3,+\infty),\quad y'(4)=4^2-4\cdot4+3=11>0.$$

Знак похідної на кожному з трьох інтервалів збігається зі знаком похідної в обраній точці відповідного інтервалу (табл. 1).

З таблиці видно: при переході (зліва направо) через значення x = 1 похідна змінює знак з «+» на «–». Звідси, при x = 1 функція має максимум:

$$y_{\max}(1)=\frac{1^3}{3}-2\cdot1^2+3\cdot1+1=\frac{7}{3}.$$

Табл. 1

x	(– ∞, 1)	1	(1, 3)	3	(3, + ∞)
y'	+	0	–	0	+
y	$\nearrow$	$y_{\max}(1)=\frac{7}{3}$	$\searrow$	$y_{\min}(3)=1$	$\nearrow$

При переході через значення x = 3 похідна змінює знак з «–» на «+». Звідси, при x = 3 функція має мінімум:

$$Y_{\min}(3)=\frac{3^3}{3}-2\cdot3^2+3\cdot3+1=1.$$

На інтервалі:

1) $(-\infty,\ 1)$ — функція зростає;
2) (1, 3) — спадає;
3) $(3,\ +\infty)$ — зростає.

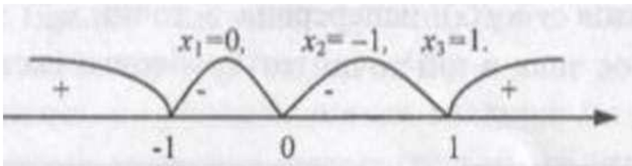
Крім того,

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1\right) = \pm\infty .$$

Приклад 2. Дослідити функцію $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$ на зростання (спадання) та екстремуми.

Розв'язання

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$$

1. $D(f): (-\infty; +\infty)$;
2. $f'(x) = 15x^4 - 15x^2$
3. $f'(x) = 0, 15x^4 - 15x^2 = 0, x^2(x^2 - 1) = 0$
4. 

5. $f(x)$ зростає при $x \in (-\infty; -1); (1; \infty)$; $f(x)$ спадає при $x \in (-1; 1)$

$x_{\max} = -1, y_{\max} = f(-1) = 3\cdot(-1)^5 - 5(-1)^3 + 1 = -3 + 5 + 1 = 3$

$x_{\min} = 1, y_{\min} = f(1) = 3\cdot 1^5 - 5\cdot 1^3 + 1 = -1$

Приклад 3. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 2$ при $x \in [1;3]$.

Розв'язання

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 2,\ x \in [1;3]$$

1. $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$
2. $f'(x) = 0,\ 3x^2 + 6x - 24 = 0,\ x^2 + 2x - 12 = 0$

$$x_1 = -4, x_2 = 2$$

3. $x_1 = -4 \notin [1;3]$
4. $f(1) = 2, f(2) = -6, f(3) = 4$
5. $\max\limits_{[1;3]} f(x) = f(3) = 4 \qquad \min\limits_{[1;3]} f(x) = f(2) = -6$

Відповідь, $\max\limits_{[1;3]} f(x) = f(3) = 4 \qquad \min\limits_{[1;3]} f(x) = f(2) = -6$

Задачі

1. Знайти інтервали монотонності таких функцій:

1. $y = x^2(a - x)^2$.
2. $y = x + \dfrac{a^2}{x}; (a > 0)$.
3. $y = x\sqrt{2 - x^2}$.
4. $y = (x-2)^5(2x+1)^4$.

5. $y=\sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2};(a>0)$. 6. $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$.

7. $y=\dfrac{10}{4x^3-9x^2+6x}$. 8. $y=x-e^x$.

9. $y=x^2e^{-x}$. 10. $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

2. Визначити екстремуми функцій:

1. $y=2x^3-3x^2$. 2. $y=2x^3-6x^2-18x+7$.

3. $y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$. 4. $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+8}$.

5. $y=\dfrac{1}{\ln\left(x^4+4x^3+30\right)}$. 6. $y=-x^2\sqrt{x^2+2}$.

7. $y=x-\ln(1+x)$. 8. $y=x-\ln\left(1+x^2\right)$.

9. $y=(x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$. 10. $y=\left(x^2-2x\right)\ln x-\dfrac{3}{2}x^2+4x$.

3. Знайти найбільше і найменше значення функцій у заданих проміжках:

1. $y=x^4-2x^2+5;\ [-2;2]$. 2. $y=x+2\sqrt{x};\ [0;4]$.

3. $y=x^5-5x^4+5x^3+1;[-1;2]$. 4. $y=x^3-3x^2+6x-2;[-1;1]$.

5. $y=\sqrt{100-x^2};\ [-6;8]$. 6. $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2};\ [0;1]$.

7. $y=\dfrac{x-1}{x+1};[0;4]$.

8. $y=\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{1-x};\ (0<x<1);\ (a>0;b>0)$.

9. $y=\sin 2x-x;\ \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$. 10. $y=2\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}^2x;\ \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Опуклість, вгнутість, точки перегину. Асимптоти графіка.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти інтервали опуклості та вгнутості графіка функції $y=e^{-x^2}$.

Маємо $y'=-2xe^{-x^2}$, $y''=4\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)e^{-x^2}$.

Друга похідна y'' перетворюється в нуль, коли

$$x^2-\frac{1}{2}=0,\ \text{звідки}\ x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

При переході через точки x_1 і x_2 друга похідна змінює знак. Таким чином, точки $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ і $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ є точками перегину графіка функції.

Результати дослідження заносимо в табл. 2.

Табл. 2

x	$\left(-\infty,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ +\infty\right)$
y''	+	0	–	0	+
y	$\cup$	Перегин	$\cap$	Перегин	$\cup$

Із цієї таблиці бачимо, що графік функції на інтервалах $\left(-\infty,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ і $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ +\infty\right)$ вгнутий, а на інтервалі $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ — опуклий.

Приклад 2. Визначити асимптоти кривої $y=\frac{x^2+2x-1}{x}$.

1. Оскільки

$$\lim_{x\to\pm 0} y=\lim_{x\to\pm 0}\frac{x^2+2x-1}{x}=\lim_{x\to\pm 0}\left(x+2-\frac{1}{x}\right)=\mp\infty,$$

то пряма $x = 0$ (вісь Ox) є вертикальною асимптотою.

2. Нехай похила асимптота має рівняння $y=kx+b$, тоді

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(y-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2.$$

Отже, пряма $y=x+2$ є похилою асимптотою.

Приклад 3. Знайти асимптоти функції $y=\frac{x-1}{x+1}$.

Розв'язання

1. Знайдемо одну із односторонніх границь функції в точці $x-1$:

$$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1+}\frac{x-1}{x+1}=\left[\frac{-}{+0}\right]=-\infty$$

$x-1$ - точка розриву другого роду заданої функцій

Отже, $x-1$ - *вертикальна* асимптота.

2. Знайдемо похилу асимптоту $y=kx+b$, використавши формули

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)$$

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{(x+1)x}=0, b=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=1$$

Оскільки $k=0$, то $y=1$ - *горизонтальна* асимптота.

Задачі

1. Знайти точки перегину та інтервали опуклості і вгнутості графіків функцій:

1. $y=x^3-5x^2+3x-5$. 2. $y=\left(x+1\right)^4+e^x$.

3. $y=x^4-12x^3+48x^2-50$. 4. $y=x+36x^2-2x^3-x^4$.

5. $y=3x^5-5x^4+3x-2$. 6. $y=\left(x+2\right)^6+2x+2$.

7. $y=\frac{x^3}{x^2+3a^2}$; $\left(a>0\right)$. 8. $y=a\sqrt[3]{x-b}$.

9. $y=e^{\sin x}$; $\left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$. 10. $y=\ln\left(1+x^2\right)$.

2. Знайти асимптоти таких ліній:

1. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. 2. $xy=a$.

3. $y=\frac{1}{x^2-4x+5}$. 4. $y=c+\frac{a^3}{\left(x-b\right)^2}$.

5. $2y\left(x+1\right)^2=x^3$. 6. $y^3=a^3-x^3$.

7. $y^3=6x^2+x^3$. 8. $y^2\left(x^2+1\right)=x^2\left(x^2-1\right)$.

9. $xy^2+x^2y=a^3$. 10. $y\left(x^2-3bx+2b^2\right)=x^3-3ax^2+a^3$.

Дослідження функції та побудова її графіка.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Дослідити функцію $y=\frac{2x-1}{\left(x-1\right)^2}$ і побудувати її графік.

1. Знаходимо область визначення функції. Функція існує при всіх значеннях x за винятком значення $x = 1$. Звідси її область визначення $\left\{-\infty<x<1;\ \ 1<x<+\infty\right\}$.

2. Точка $x = 1$ є точкою розриву функції. Дослідимо її характер:

$$\lim_{x\to 1\pm 0} y = \lim_{x\to 1\pm 0} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 1\pm 0}(x-1)^2} = +\infty.$$

Як ліворуч, так і праворуч точки $x = 1$ маємо нескінченний розрив.

Точка $x = 1$ — точка розриву другого роду.

3. Вертикальні асимптоти. Пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою.

4. Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат: з віссю Ox: $y = 0$, $\frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0$, $2x-1=0$, $x=\frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$; з віссю Oy: $x = 0$, $y = \frac{-1}{1} = -1$, $(0;\ -1)$.

5. Знаходимо точки екстремуму та інтервали зростання і спадання функції, результати заносимо у табл. 3:

$$y' = \frac{2(x-1)^2 - 2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{2x}{(x-1)^3};\quad y' = 0 \Rightarrow$$

$-2x = 0 \Rightarrow x = 0$ — критична точка. При $x=1$ y' не існує, але у цій точці сама функція теж не існує. Дослідимо критичну точку $x = 0$ на екстремум:

при $x=-1$ $y' = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4} < 0(-)$;

при $x=\frac{1}{2}$ $y' = \frac{-1}{-1/8} = 8 > 0(+)$.

Табл.3

x	$(-\infty,\ 0)$	0	(0, 1)	1	$(1,\ +\infty)$
y'	–	0	+	Не існує	–
y	$\searrow$	$y_{\min}$ (–1)	$\nearrow$	Не існує	$\searrow$

Проходячи через критичну точку зліва направо, похідна змінює знак з «–» на «+», через це в точці $x = 0$ функція має мінімум: $y_{\min} = \frac{-1}{1} = -1$.

У точці $x = 1$ функція не визначена. При $1 < x < +\infty$ $y'(x) < 0$, отже, функція на цьому інтервалі спадає.

6. Точки перегину та інтервали опуклості й вгнутості графіка функції знаходимо за допомогою другої похідної:

$$y'' = \frac{-2(x-1)^3 + 6x(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}; \quad y'' = 0 \Rightarrow$$

$2(2x+1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$; при $x = 1$ y'' не існує, але в цій точці не існує і сама функція.

Дослідимо точку $x = -\frac{1}{2}$: при $x = -1$ $y'' = \frac{2(-2+1)}{(-2)^4} = -\frac{1}{8} < 0$ $(-)$;

при $x = 0$ $y'' = \frac{2}{1} = 2 > 0$ $(+)$.

Друга похідна, проходячи через $x = -\frac{1}{2}$, змінює знак, отже, точка перетину кривої з цією абсцисою є точкою перегину.

Знайдемо її ординату:

$$y = \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1}{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2} = -\frac{8}{9} \approx -0{,}9.$$

Таким чином, точка $\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{8}{9}\right)$ — точка перегину.

У точці $x = 1$ функція не визначена. При $1 < x < +\infty$ $y'' > 0$, значить, графік функції вгнутий.

Результати дослідження заносимо у табл. 4.

Табл. 4

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$	1	$(1,\ +\infty)$
y''	+	0	+	Не існує	+
y	$\cap$	Перегин (– 8/9)	$\cup$	Не існує	$\cup$

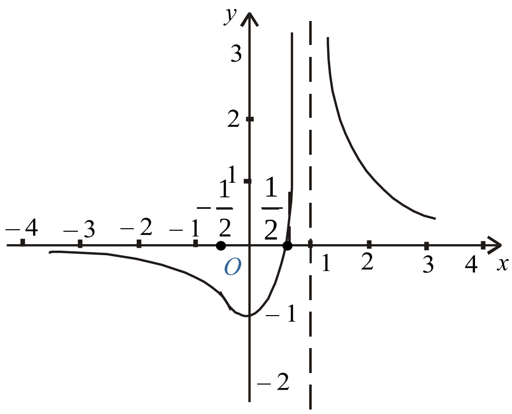
7. Рівняння похилої асимптоти знаходимо у вигляді $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{x(x-1)^2} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0.$$

Таким чином, похилою асимптотою є $y = 0$ (вісь Ox).

На підставі результатів дослідження будуємо графік функції. Для точнішої побудови візьмемо додатково точки на мал.1: (–5; – 0,3), $\left(\frac{2}{3},\ 3\right)$, (2; 3), (3; 1,3).



Мал.1

Задачі

1. Провести повне дослідження функцій і накреслити їх графіки:

1. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.
2. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$.
3. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.
4. $y(x-1)(x-2)(x-3)=1$.
5. $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.
6. $y=\left(x^2-1\right)^3$.
7. $y=32x^2\left(x^2-1\right)^3$.
8. $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$.
9. $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$.
10. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.