РОЗДІЛ ІІІ. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Лекція 6. Пряма на площині

План

1. Пряма на площині. Різні види рівнянь прямої на площині

2. Кут між двома прямими. Умова паралельності і перпендикулярності двох прямих

1. Пряма на площині. Різні види рівнянь прямої на площині

Рівняння $F(x,y)=0$ називається *рівнянням лінії* l, яка задана на площині відносно деякої системи координат, якщо це рівняння задовольняють координати x, y кожної точки, що лежить на лінії l, і не задовольняють координати x, y жодної точки, яка не лежить на цій лінії.

Пряма на площині геометрично може бути задана різними способами. Відповідно різним способам задання прямої відповідають у прямокутній системі координат різні види її рівнянь.

1. Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_o, y_o)$ паралельно вектору $\vec{s}(m,n)$. Нехай $M(x,y)-$ довільна точка прямої (рис. 6), тоді $\overrightarrow{M_0M}||\vec{s}$ і пряма лінія на площині може бути задана векторним рівнянням у параметричній формі

$$\vec{r}(t)=\overrightarrow{r_0}(t)+\vec{s}t, \tag{1}$$

де $\vec{s}-$ напрямний вектор прямої l, $\overrightarrow{r_0}-$ радіус-вектор фіксованої точки $M_0(x_o, y_o)$ на прямій, $\vec{r}(t)-$ радіус-вектор довільної точки на прямій, t – скалярний параметр.

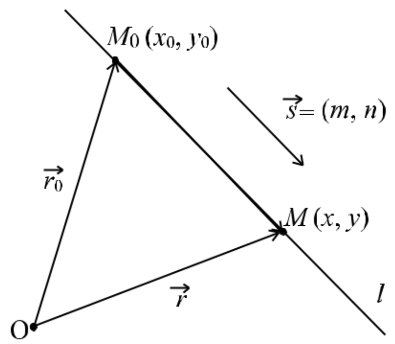

Рис. 6

Прирівнюючи відповідні координати векторів $\vec{r}$ та $\overrightarrow{r_0} + \vec{s}t$ за формулою (1), маємо

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \tag{2}$$

звідки

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}. \tag{3}$$

Рівняння (2) називаються *параметричними рівняннями прямої*, рівняння (3) – її *канонічним рівнянням*.

2. Якщо в рівнянні (3) ввести позначення $\frac{n}{m} = k,\ y_0 - \frac{n}{m}x_0 = b,$ то дістанемо

$$y = kx + b. \tag{4}$$

Відношення $k = \frac{n}{m} = tg\alpha,\ \alpha -$ кут, утворений прямою з додатнім напрямом осі Ox (рис. 7), називається *кутовим коефіцієнтом прямої*. Рівняння (4) називається *рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом*.

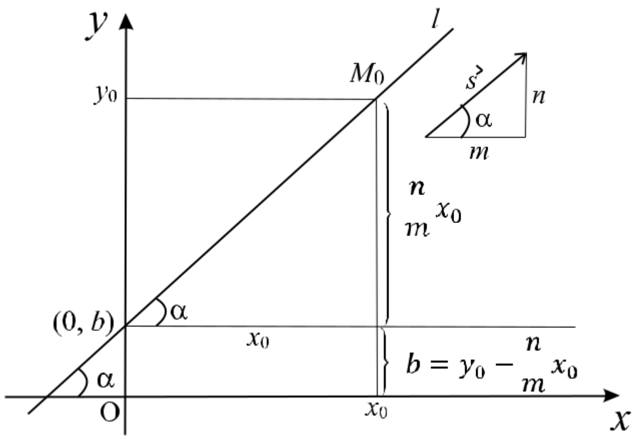

Рис. 7

Якщо пряма має кутовий коефіцієнт k і проходить через точку M_0, то її рівняння має вигляд

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{5}$$

3. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$ дістанемо з рівняння прямої, що проходить через точку M_1 і має напрямний вектор $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{6}$$

4. Якщо пряма проходить через точки $A(a,0), B(0,b)$, тобто відтинає на осях відрізки $a,\ b$, то рівняння (6) запишеться

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{7}$$

Рівняння (7) називається *рівнянням у відрізках на осях.*

5. Розглянемо рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M_1(x_1,y_1)$ перпендикулярно до заданого ненульового вектора $\vec{n}(A,B)$. Тоді її рівняння має вигляд

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0. \tag{8}$$

Рівняння (8) називається рівнянням прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора. Вектор $\vec{n}(A,B)$ називається *нормальним вектором* прямої.

6. Рівняння виду

$$Ax+By+C=0 \tag{9}$$

називається *загальним рівнянням* прямої. Коефіцієнти *A* і *B* при *x* і *y* загального рівняння є координатами її нормального вектора.

2. Кут між двома прямими. Умова паралельності і перпендикулярності двох прямих

1. Кут φ, який відраховується проти годинникової стрілки від прямої l_1 до прямої l_2 (рис. 8), заданих рівняннями $y=k_1x+b_1,\ y=k_2x+b_2$, визначається

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \tag{10}$$

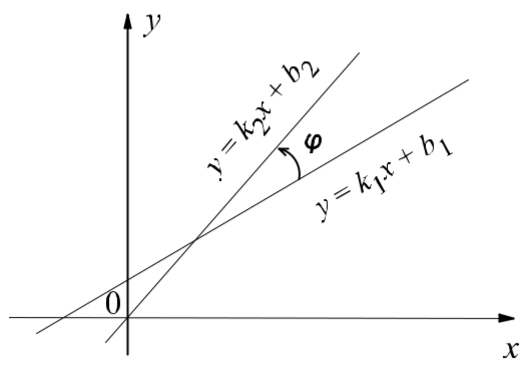

Рис. 8

Якщо прямі паралельні, то $\varphi = 0, tg\varphi = 0$. Тоді $k_1 = k_2$.

Якщо прямі перпендикулярні, то $\varphi = 90^{\circ}, tg\varphi$ не існує. Тому умова перпендикулярності має вигляд

$$1 + k_1 k_2 = 0 \text{ або } k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

2. Нехай прямі l_1, l_2 задані канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1}; \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2}. \tag{11}$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{s_1} = (m_1, n_1)$, $\overrightarrow{s_2} = (m_2, n_2)$ є напрямними векторами прямих і кут $\varphi = (\overrightarrow{s_1} \hat{,} \overrightarrow{s_2})$, то маємо

$$cos\varphi = \frac{\overrightarrow{s_1}\overrightarrow{s_2}}{|\overrightarrow{s_1}||\overrightarrow{s_2}|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2}}.$$

Якщо прямі l_1, l_2 паралельні, то $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$.

Якщо прямі l_1, l_2 перпендикулярні, то $m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.

3. Нехай прямі l_1, l_2 задані загальними рівняннями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$, $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$. Тоді кут $\varphi = (\overrightarrow{n_1} \hat{,} \overrightarrow{n_2})$. Отже,

$$cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Якщо прямі l_1, l_2 паралельні, то $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Якщо прямі l_1, l_2 перпендикулярні, то $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ визначають

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$