

Лекція 15. Похідні функції. Диференціал

План

1. Таблиця похідних

2. Диференціал функції та його застосування

3. Похідні і диференціали вищих порядків

4. Основні теореми диференціального числення

1. Таблиця похідних

За аналогією з попередніми прикладами можна дістати похідні від основних елементарних функцій.

Таблиця основних елементарних функцій

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$ (n – будь-яке дійсне число)

2. $(a^x)' = a^x \ln a$ ($a > 0, a \neq 1$)

3. $(e^x)' = e^x$

4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ($a > 0, a \neq 1$)

5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

6. $(\sin x)' = \cos x$

7. $(\cos x)' = -\sin x$

8. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Приклад. Обчислити похідну функції $y = -4 \sin x$.

Розв'язання. $y' = (-4 \sin x)' = -4(\sin x)' = -4 \cos x$.

Приклад. Обчислити похідну функції $y = \sin \frac{\pi}{8}$.

Розв'язання. $y' = \left(\sin \frac{\pi}{8}\right)' = 0$.

Приклад. Обчислити похідну функції $y = x^3 - \frac{1}{x^4} + 6\sqrt[3]{x^2}$.

Розв'язання. $y = x^3 - \frac{1}{x^4} + 6\sqrt[3]{x^2} = x^3 - x^{-4} + 6x^{2/3}$. Знайдемо похідну

$$y' = 3x^2 + 4x^{-5} + 6 \cdot \frac{2x^{-1/3}}{3} = 3x^2 + \frac{4}{x^5} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$$

2. Диференціал функції та його застосування

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0 . Тоді її приріст у цій точці можна подати у вигляді $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$,

де $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Отже, доданок $A\Delta x$ є головною частиною приросту функції, яка лінійно залежить від Δx .

Диференціалом функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається головна частина приросту функції в цій точці, яка лінійно залежить від Δx .

Диференціал функції позначається так: $dy = A\Delta x$. Враховуючи, що $A = f'(x_0)$, маємо $dy = f'(x_0)\Delta x$. Диференціалом незалежної змінної x називається її приріст: $dx = \Delta x$. Отже,

$$dy = f'(x_0)dx.$$

Із останньої формули випливає, що похідну $f'(x_0)$ можна обчислити як відношення диференціалів:

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}.$$

Оскільки диференціал dy функції $y = f(x)$ є головною частиною її приросту, то це дає можливість застосувати диференціал функції в наближених обчисленнях: із наближеної рівності $\Delta y = dy$, тобто

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)dx, f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx. \quad (15.1)$$

Приклад. Знайти наближено $\sqrt{4,001}$. Розглянемо функцію $y = \sqrt{x}$.

Покладемо $x_0 = 4$, $\Delta x = 0,001$. Тоді $\sqrt{4,001} = \sqrt{x_0 + \Delta x}$. Далі маємо

$$f(x_0) = \sqrt{4} = 2, f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

Отже, $\sqrt{4,001} \approx 2 + \frac{1}{4} \cdot 0,001 = 2,00025..$

Нехай тепер маємо складену функцію $y = f(u), u = \varphi(x)$, де $f(u), \varphi(x)$ диференційовані функції в точках x_0 і $u_0 = \varphi(x_0)$. Тоді

$$dy = (f(\varphi(x_0)))'_x dx.$$

Так як

$$(f(\varphi(x_0)))'_x = f'_u(u_0)u'_x, \text{ то } dy = f'_u(u_0)u'_x dx.$$

Оскільки $u'_x dx = du$, то маємо $dy = f'_u(u_0)du$.

Таким чином, якщо функція складена, то форма диференціалу не змінює свого виду. Цю властивість називають *інваріантністю форми диференціалу*.

3. Похідні і диференціали вищих порядків

Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна на деякому інтервалі (тобто має похідну в кожній точці інтервалу), то за означенням *похідна другого порядку (друга похідна)* цієї функції знаходиться за формулою $y'' = (y')'$. Аналогічно *похідна третього порядку (третья похідна)* $y''' = (y'')'$ і т.д.

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в кожній точці x деякого проміжку X . Її диференціал першого порядку $dy = y'(x)dx$ є функцією двох змінних: аргументу x і диференціала dx . Нехай $f'(x)$ також диференційована в кожній точці x деякого проміжку X . Будемо розглядати у виразі $dy = f'(x)dx$ диференціал dx як постійний множник. Тоді

$$d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dxdx = f''(x)dx^2.$$

Диференціал $d(dy)$ називається диференціалом другого порядку і позначається d^2y . Отже, $d^2y = f''(x)dx^2$.

Диференціал $d(d^{n-1}y)$ від диференціала $d^{n-1}y$, взятий при постійному dx називається диференціалом n -го порядку функції $y = f(x)$ і позначається $d^n y$. Методом математичної індукції можна встановити, що $d^n y = f^{(n)}(x)(dx)^n$. Із останньої формули випливає, що

$$y^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

4. Основні теореми диференціального числення

Теорема Ферма. Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі (a, b) і в деякій точці $x_0 \in (a, b)$ має найбільше або найменше значення. Тоді, якщо в цій точці існує похідна $f'(x_0)$, то вона рівна нулю, тобто $f'(x_0)=0$.

Теорема Ролля. Якщо функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a, b]$ і вона

- 1) неперервна в кожній точці відрізка $[a, b]$,
- 2) диференційована на інтервалі (a, b) ,
- 3) на кінцях відрізка $[a, b]$ приймає рівні значення $f(a) = f(b)$, то існує точка $C \in (a, b)$ така, що $f'(C)=0$.

Теорема Лагранжа. Якщо функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a, b]$ і вона

- 1) неперервна в кожній точці відрізка $[a, b]$,
- 2) диференційована на інтервалі (a, b) , то існує точка $C \in (a, b)$ така, що

$$f'(C) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Теорема Коші. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$

- 1) неперервні на відрізку $[a, b]$,
- 2) диференційовані на інтервалі (a, b) , і $g'(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$, то існує точка $C \in (a, b)$ така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(C)}{g'(C)}.$$