Лекція 17. Застосування похідної до дослідження функцій

План

1. Ознака монотонності функції

2. Точки екстремуму

3. Необхідні й достатні умови існування екстремуми функції

4.Знаходження найбільшого й найменшого значення функції на відрізку

5. Опуклість та вгнутість кривої. Точки перегину

6. Асимптоти графіка функції

7. Загальна схема дослідження функцій і побудови їх графіків

1. Ознака монотонності функції

Теорема. *Якщо функція $f(x)$ диференційована на інтервалі (a, b) і $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ на (a, b), то функція $f(x)$ зростає (спадає).*

2.Точки екстремуму

Точка x_0 називається точкою *локального максимуму (мінімуму)* функції $f(x)$, якщо існує $\delta -$ окіл $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 такий, що $f(x_0) > f(x)$ $\left(f(x_0) > f(x)\right)$ для будь-якої відмінної від x_0 точки $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. При цьому саме значення $f(x_0)$ називається *локальним максимумом (мінімумом)* функції $f(x)$.

Точки максимуму і мінімуму функції $f(x)$ називаються *точками екстремуму або екстремальними точками* функції.

3. Необхідні й достатні умови існування екстремуми функції

Необхідна умова існування локального екстремуму функції. *Якщо в точці x_0 функція $f(x)$ має екстремум, то існує окіл $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, в якому значення $f(x_0)$ є найбільшим або найменшим. Отже, якщо в точці x_0 функція $f(x)$ диференційована, то згідно теореми Ферма $f(x_0)$ =0.*

Зазначимо, що коли функція $f(x)$ диференційована в точці x_0 і $f(x_0) \neq 0$, то або $f(x_0) > 0$, тобто функція зростає, або $f(x_0) < 0$ і функція спадає. Звідси випливає, що функція $f(x)$ може мати екстремум лише в тих точках, у яких її похідна рівна нулю, або не існує.

Точки, в яких похідна функції рівна нулю, називаються *стаціонарними*. Стаціонарні точки й точки, в яких функція визначена, але її похідна не існує називаються *критичними*.

Отже, для того, щоб функція $f(x)$ мала в точці x_0 екстремум, необхідно, щоб ця точка була критичною.

Теорема (достатні умови існування екстремуму функції) *Нехай x_0 – критична точка функції $f(x)$, $f(x)$ неперервна в точці x_0 і має похідну $f'(x)$ в усіх точках околу $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$за виключенням, можливо самої точки x_0. Тоді*

1) якщо $f'(x) > 0$ для $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ і $f'(x) < 0$ для $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то точка x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$.

2) Якщо $f'(x) < 0$ для $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ і $f'(x) > 0$ для $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, *то точка x_0 є точкою мінімуму функції $f(x)$.*

3) Якщо $f'(x)$ в околі $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ має один і той же знак, то x_0 не є точкою екстремуму функції $f(x)$.

Із сказаного випливає правило дослідження функції на екстремум. Щоб дослідити функцію $f(x)$ на екстремум треба:

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти $f'(x)$ – першу похідну функції $f(x)$.
3. Розв'язати рівняння $f'(x) = 0$ та визначити ті значення x, при яких $f'(x) = \infty$ або $f'(x)$ не існує. Нехай після виконання цих дій одержано точки $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, які знаходяться в інтервалі (a, b) області визначення функції.
4. У кожному з інтервалів $(a, x_1), (x_1, x_2), .., (x_{n-1}, x_n)$ взяти довільну точку і визначити в ній знак першої похідної. Який знак матиме похідна у вибраній точці, такий же знак вона матиме й у відповідному інтервалі.
5. Розглянути знак $f'(x)$ у сусідніх інтервалах, переходячи послідовно зліва направо від першого інтервалу до останнього. Якщо при цьому знаки

$f'(x)$ у двох сусідніх інтервалах різні. То в критичній точці є екстремум: максимум, якщо знак змінюється з “+” на “-“, мінімум, якщо знак змінюється з “-“ на “+”. Якщо ж у двох сусідніх інтервалах знак першої похідної не змінюється. То екстремуму у відповідній критичній точці немає.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$.

1. Функція визначена в інтервалі $(-\infty, +\infty)$.

2. $y' = x^3 - 2x^2 - 3x$.

3. Розв’язками рівняння $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$ є $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 3$.

4. В інтервалі $(-\infty, -1)$ $y' < 0$,функція спадає; в інтервалі $(-1,0)$ $y' > 0$, функція зростає; інтервалі $(0,3)$ $y' < 0$, функція спадає; в інтервалі $(3, \infty)y' > 0$, функція зростає.

5. Точки $x_1 = -1$, $x_3 = 3$ є точками мінімуму, а точка $x_2 = 0$ є точкою максимуму даної функції.

6. $y_{min} = 1\frac{5}{12}; y_{min} = -9\frac{1}{4}; y_{max} = 2$.

Теорема. *Нехай* x_0 *– стаціонарна точка функції* $f(x)$ *і в цій точці існує похідна другого порядку* $f''(x) \neq 0$. *Тоді, якщо* $f''(x) > 0$, *то точка* x_0 *є точкою мінімуму функції* $f(x)$, *а якщо* $f''(x) < 0$, *то – максимуму.*

Теорема. *Якщо в стаціонарній точці* x_0 *функції* $f(x)$ *перша відмінна від нуля похідна* $f^{(n)}(x_0)$ *є похідною парного порядку, то точка* x_0 *є точкою екстремуму функції: точкою мінімуму, якщо* $f^{(n)}(x_0) > 0$ *і точкою максимуму, якщо* $f^{(n)}(x_0) < 0$. *Якщо ж перша відмінна від нуля похідна* $f^{(n)}(x_0)$ *є похідною непарного порядку, то точка* x_0 *не є точкою екстремуму функції.*

4. Знаходження найбільшого й найменшого значення функції на відрізку

Для знаходження найбільшого й найменшого значення функції $f(x)$, неперервної на відрізку $[a, b]$, потрібно знайти всі її локальні екстремуми на цьому відрізку та її значення на кінцях відрізка, тобто $f(a), f(b)$. Потім з одержаних значень вибрати найменше й найбільше.

5. Опуклість та вгнутість кривої. Точки перегину

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі (a, b) і в кожній точці цього інтервалу має скінчену похідну. Тоді в кожній точці $M(x, f(x))$ графіка цієї функції можна провести дотичну, не паралельну осі Oy. Крива, яка є графіком цієї функції, називається гладкою.

Якщо крива, яка є графіком функції $y = f(x)$, розміщена не нижче будь-якої дотичної на інтервалі (a, b), то вона називається *вгнутою догори* або просто вгнутою на цьому інтервалі. Іноді її ще називають *опуклою вниз* (рис. 20).

Якщо крива, яка є графіком функції $y = f(x)$, розміщена не вище будь-якої дотичної на інтервалі (a, b), то вона називається *вгнутою донизу* або просто опуклою на цьому інтервалі. Таку криву ще називають *опуклою вгору* (рис. 21).

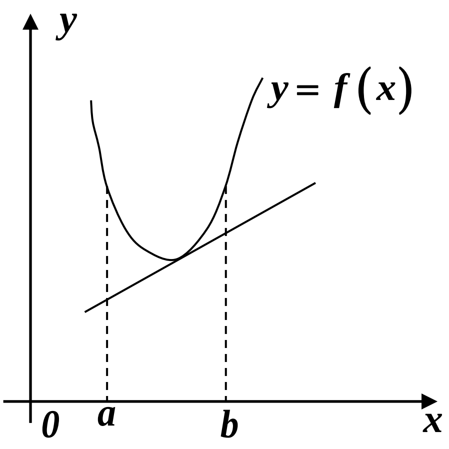

Рис. 20

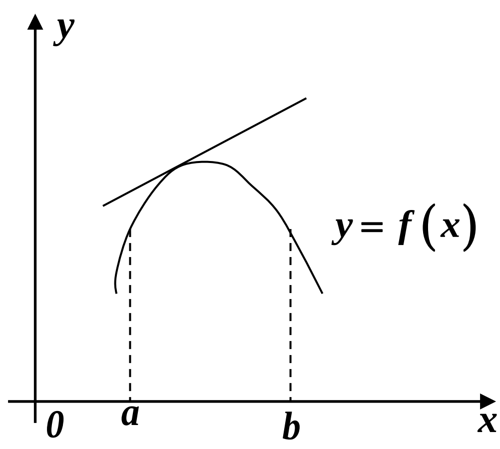

Рис. 21

Точка $M_0(x_0, f(x_0))$ називається точкою перегину гладкої кривої $y = f(x)$, якщо існує $\delta-$окіл точки x_0 такий, що в інтервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ і $(x_0, x_0 + \delta)$ крива $y = f(x)$, має опуклість різних напрямків.

Теорема. *Нехай функція* $y = f(x)$, *визначена на інтервалі* (a, b) *і в кожній точці цього інтервалу має похідні до другого порядку включно. Тоді,* *якщо* $f''(x) > 0$ *у всіх точках* $x \in (a,b)$, *то графік функції* $y = f(x)$, *на інтервалі* (a,b) *вгнутий (опуклий вниз), якщо ж* $f''(x) < 0$ *у всіх точках* $x \in (a,b)$, *то графік функції опуклий (опуклий вгору).*

Установимо необхідну умову існування точки перегину графіка функції $y = f(x)$. Нехай функція $y = f(x)$ визначена і має неперервні похідні до другого порядку включно на інтервалі (a,b). Тоді. Якщо в кожній точці $x \in (a,b)$ $f''(x) > 0$, то графік функції $y = f(x)$ на інтервалі (a,b) вгнутий (опуклий вниз). Якщо $f''(x) < 0$, $x \in (a,b)$, – то графік опуклий (опуклий вгору).

Отже, якщо на інтервалі (a,b) $f''(x) \neq 0$, то графік функції $y = f(x)$ точок перегину на цьому інтервалі не має. Отже, умова $f''(x) = 0$ є необхідною, для того, щоб точка $M_0(x_0, f(x_0))$ була точкою перегину графіка функції $y = f(x)$.

Установимо достатню умову існування точки перегину графіка функції $y = f(x)$. Нехай точка $M_0(x_0, f(x_0))$ така, що $f''(x) = 0$ й існує таке δ, що в інтервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ і $(x_0, x_0 + \delta)$ друга похідна $f''(x)$ має різні знаки. Тоді точка $M_0(x_0, f(x_0))$ є точкою перегину.

Зауваження. Точка $M_0(x_0, f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$ і в тому випадку, коли в точці M_0 існує дотична до графіка функції $y = f(x)$, друга похідна в самій точці x_0 не існує, але існує в деякому δ-околі точки x_0, причому в інтервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ і $(x_0, x_0 + \delta)$ має різні знаки.

6. Асимптоти графіка функції

Пряма L називається асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо відстань від точки M кривої до прямої L при віддаленні точки M у нескінченність прямує до нуля.

Із наведеного означення випливає, що асимптоти можуть існувати лише у тих кривих, які мають як завгодно віддалені точки, тобто у “нескінчених” кривих.

Надалі розрізнятимемо похилі і вертикальні асимптоти. До похилих асимптот належать також і горизонтальні асимптоти.

Якщо функція $f(x)$ визначена на нескінченості і існують границі

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\ \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=b,$$

то пряма $y=kx+b$ є похилою асимптотою кривої $y=f(x)$ при $x\to\infty$.

Із означення асимптоти кривої $y=f(x)$ випливає, що пряма $x=a$ є вертикальною асимптотою, якщо принаймні одна з границь $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ або $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ рівна $+\infty$ або $-\infty$.

7. Загальна схема дослідження функцій і побудови їх графіків

При дослідженні функцій і побудові їх графіків може бути застосована, наприклад, наступна схема:

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти точки розриву та визначити їх тип.
3. Знайти асимптоти графіка функцій.
4. Знайти похідну функції і за її допомогою встановити інтервали зростання і спадання функції.
5. Знайти точки максимуму і мінімуму функції, а також максимальне й мінімальне значення функції.
6. Знайти другу похідну і за її допомогою визначити інтервали опуклості й точки перегину графіка функції.
7. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.
8. Враховуючи одержані результати, побудувати графік функції.