Лекція 2. Визначники та їх властивості

План

1. Визначники матриць

2. Властивості визначників

3. Деякі правила обчислення визначників

4. Ранг матриці

5. Обернена матриця

1. Визначники матриць

Визначник – це число, яке обчислюється за певним правилом. Визначник матриці A називається також *детермінантом* і позначається $\det A$, $|A|$, $\Delta(A)$.

Кожній квадратній матриці A можна поставити у відповідність її визначник , який складається з тих самих елементів, тобто

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Якщо визначник матриці не дорівнює нулю, то матриця називається *неособливою (невиродженою)*. Якщо визначник дорівнює нулю, то матриця *особлива (вироджена).*

Визначником (детермінантом) другого порядку називається вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Визначником (детермінантом) третього порядку називається вираз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

2. Властивості визначників

Властивість 1. Визначник не змінюється в результаті транспонування.

З властивості 1 випливає, що будь-яке твердження, котре справджується для рядків визначника, справджується і для його стовпців, і навпаки.

Властивість 2. Якщо один із рядків визначника складається лише з нулів, то такий визначник дорівнює нулю.

Властивість 3. Якщо поміняти місцями довільні два рядки визначника, то його знак зміниться на протилежний.

Властивість 4. Визначник, який має два однакові рядки, дорівнює нулю.

Властивість 5. Якщо елементи будь-якого рядка визначника помножити на стале число C, то визначник помножиться на C.

З останньої властивості випливає, що спільний множник елементів рядка можна виносити за знак визначника.

Властивість 6. Визначник, який має два пропорційні рядки, дорівнює нулю.

Властивість 7. Якщо всі елементи будь-якого рядка визначника можна подати у вигляді суми двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких елементами цього рядка будуть відповідно перший доданок у першому визначнику і другий доданок у другому визначнику, а решта елементів будуть ті самі, що й у початковому визначнику.

Властивість 8. Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка додати відповідні елементи довільного іншого рядка, попередньо помножені не деяке число.

3. Деякі правила обчислення визначників

Для запам'ятовування правила обчислення визначника третього порядку пропонуємо таку схему *(правило трикутників)*:

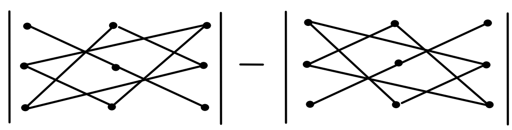

Рис.1

Розглянемо *правило Саррюса* обчислення визначника третього порядку.У початковому визначнику за третім стовпцем запишемо ще раз перший і другий стовпці:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Для знаходження визначника за цим правилом треба утворити зі знаком «плюс» алгебраїчну суму добутків елементів, розміщених на головній діагоналі визначника, і на діагоналях, паралельних їй, а зі знаком «мінус» — добутків елементів, розміщених на бічній діагоналі, та на діагоналях, паралельних їй.

Якщо у визначнику рядки замінити відповідними стовпцями, то отримаємо *транспонований визначник*.

Якщо у визначника $n-$го порядку викреслити $i-$й рядок та $j-$й стовпець, то отримаємо визначник $(n-1)-$го порядку, який називають *мінором елемента* a_{ij} і позначають M_{ij}.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника $n-$го порядку називають його мінор M_{ij}, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, позначають A_{ij}, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Визначник будь-якого порядку можна подати як суму добутків елементів одного якого-небудь рядка (або стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.

Приклад. Обчислити визначник другого порядку $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 5.$

Приклад. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. За правилом трикутника маємо

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 4 + (-1) \cdot 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 \cdot 3 -$$

$-(-2)\cdot(-2)\cdot 3-4\cdot 1\cdot 2-1\cdot(-1)\cdot 4=-18.$

За правилом Саррюса запишемо

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{matrix} = 2\cdot(-2)\cdot 4+(-1)\cdot 1\cdot(-2)+3\cdot 1\cdot 4-$$

$-3\cdot(-2)\cdot(-2)-2\cdot 1\cdot 4-(-1)\cdot 1\cdot 4=-18.$

Для прикладу обчислимо цей визначник за елементами другого стовпця

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}+(-2)\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}+$$

$$+4\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6-28+4=-18.$$

4. Ранг матриці

Розглянемо матрицю A розмірності $m\times n$. Якщо в цій матриці викреслити довільно k стовпців і k рядків, то елементи які розташовані на перетині виділених стовпців і рядків, утворюють квадратну матрицю $k-$го порядку. Визначник цієї матриці називається мінором $k-$ го порядку матриці A. Отже, матриця A має мінори будь-якого порядку від 1 до найменшого з чисел m і n. Серед всіх відмінних від нуля мінорів матриці A найдеться, принаймні, один мінор, порядок якого буде найбільшим.

Рангом матриці A називається найвищий порядок відмінних від нуля її мінорів.

Якщо всі елементи матриці A дорівнюють нулю, то говорять, що ранг матриці A дорівнює нулю. Якщо ранг матриці A дорівнює r, то це означає, що в матриці A є, принаймні, один, відмінний від нуля мінор порядку r, а всі мінори порядку, більшого ніж r, дорівнюють нулю. Ранг матриці позначається: $r(A)$ або $rang\ (A)$. Завжди справедлива нерівність

$$0\le r(A)\le \min(m,n).$$

Властивості рангу матриці

1. При транспонуванні ранг матриці не змінюється.

2. Ранг матриці не змінюється при перестановці її стовпців (рядків).

3. Ранг матриці не змінюється при множенні всіх елементів її стовпця (рядка) на ненульове число.

4. Ранг матриці не змінюється, якщо до одного з її стовпців (рядків) додати інший стовпець (рядок), помножений на ненульове число.

5. Ранг матриці не змінюється, якщо видалити з неї нульовий стовпець (рядок).

6. Ранг матриці не змінюється, якщо видалити з неї стовпець (рядок), який є лінійною комбінацією інших стовпців (рядків).

Методи обчислення рангу матриці

Метод обвідних мінорів. Ранг матриці визначається в наступній послідовності:

1. Якщо серед елементів матриці є хоча б один відмінний від нуля елемент, то знаходимо ненульовий мінор другого порядку. Коли всі мінори другого порядку дорівнюють нулю, тоді ранг матриці дорівнює одиниці.

2. Якщо серед мінорів другого порядку є хоча б один відмінний від нуля, то складаємо всі обвідні його мінори третього порядку. Коли всі обвідні мінори третього порядку дорівнюють нулю, тоді $r(A) = 2$.

3. Якщо хоча б один з обвідних мінорів третього порядку відмінний від нуля, то складаємо всі обвідні його мінори четвертого порядку. Коли всі обвідні мінори четвертого порядку дорівнюють нулю, тоді $r(A) = 3$. У протилежному випадку процедура повторюється.

Метод обвідних мінорів вимагає обчислення дуже великого числа мінорів матриці. Це є суттєвим його недоліком. Існує більш удосконалений метод обчислення рангу матриць. Він не потребує обчислення визначників. Він використовує елементарні перетворення матриці.

Метод елементарних перетворень. Суть цього методу полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень матрицю спрощують, а потім визначають її ранг.

Елементарними називаються наступні перетворення матриць:

- перестановка двох будь-яких стовпців (рядків);
- множення елементів будь-якого стовпця (рядка) на ненульове число;
- додавання до одного стовпця (рядка) лінійної комбінації інших стовпців (рядків).

Із розглянутих властивостей рангу матриці, випливає, що при елементарних перетвореннях матриці її ранг не змінюється.

Дві матриці називаються *еквівалентними*, якщо одна з них отримується з іншої за допомогою скінченного числа елементарних перетворень.

Еквівалентні матриці об’єднуватимемо знаком «~» («тильда»).

5. Обернена матриця

Якщо $A -$ квадратна матриця, то *оберненою* до неї буде матриця того самого порядку, яка позначається A^{-1} і задовольняє умові $A \cdot A^{-1} = E$. Обернена до A існує лише тоді, коли $\Delta(A) \neq 0$, і обчислюється за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} −алгебраїчні доповнення до елементів матриці A.

<u>*Приклад.*</u> Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

<u>*Розв’язання.*</u> Обчислимо визначник матриці A:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2.$$

Так як $\Delta \neq 0$, то матриця A неособлива і має обернену. Щоб скласти цю матрицю, знайдемо алгебраїчні доповнення до кожного елемента матриці A.

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4$; $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2$;

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3$; $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1$.

Тоді

$$A^{-1} = -\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$