Лекція 9. Криві другого порядку

План

1. Коло

2. Еліпс

3. Гіпербола

4. Парабола

1. Коло

Лінією (кривою) другого порядку називають множину M точок площини, декартові координати x, y яких задовольняють алгебраїчне рівняння другої степені

$$a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_0 = 0, \qquad (1)$$

де $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ – сталі дійсні числа, причому хоча б одне із чисел a_1, a_2, a_3 відмінне від нуля. Рівняння (1) називають *загальним рівнянням лінії другого порядку*.

Колом називають множину точок площини, відстані яких від заданої точки площини (центра кола) дорівнюють сталому числу (радіусу). Рівняння

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \qquad (2)$$

визначає коло з центром в точці $C_0(x_0, y_0)$ радіусом R. Якщо центр кола є початком координат, то його рівняння запишеться

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (3)$$

Якщо в рівнянні (2) розкрити дужки, то отримаємо

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0, \qquad (4)$$

де $m = -2x_0$, $n = -2y_0, p = x_0^2 + y_0^2 - R^2$ і називають *загальним рівнянням кола*. Для того щоб від рівняння (4) знову перейти до рівняння (2) потрібно в лівій частині (4) виділити повні квадрати

$$\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{n}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p.$$

2. Еліпс

Еліпсом називають геометричне місце точок, сума відстаней від кожної з яких до двох фіксованих даних точок F_1, F_2 є величина стала $2a, a > b,$ більша за F_1F_2.

Канонічне рівняння еліпса з півосями a, b з центром в початку координат і вершинами A_1, A_2, B_1, B_2, розташованими на осях координат, має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (5)$$

Відстані між вершинами називаються *осями еліпса*: $A_1A_2 = 2a$ – *велика (фокальна) вісь* і $B_1B_2 = 2b$ – *мала вісь* для еліпса у котрого $a > b$ (рис. 11, *а*) і навпаки $A_1A_2 = 2a$ – мала вісь, а $B_1B_2 = 2b$ – велика вісь для еліпса у котрого $b > a$ (рис. 11, *б*). Точки F_1 і F_2 називаються *фокусами*, а $F_1F_2 = 2c$ – відстань між фокусами. Відповідно до означення будь-яка точка M еліпса задовольняє умові $F_1M + F_2M = 2a$ і $b^2 = a^2 - c^2$ у випадку $a > b$ або $F_1M + F_2M = 2b$ і $a^2 = b^2 - c^2$ у випадку $b > a$.

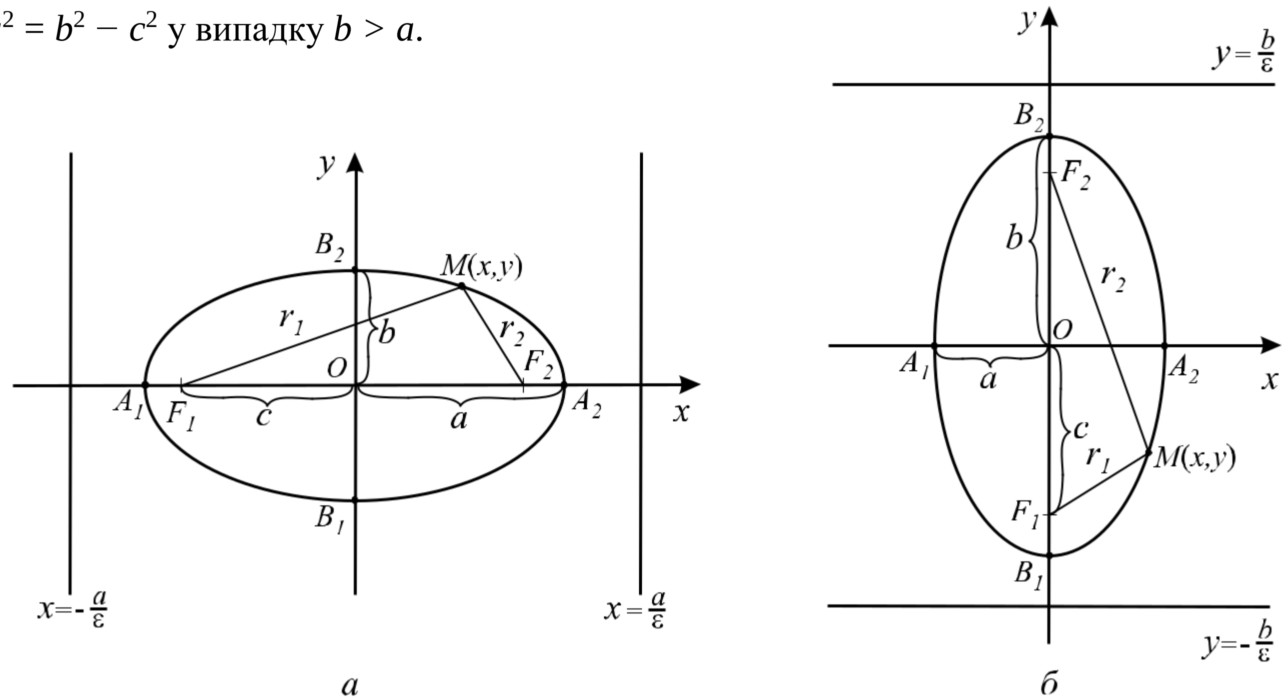

Рис. 11

Число ε, рівне відношенню відстані між фокусами F_1F_2 до довжини великої осі, називається *ексцентриситетом еліпса*:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \ (a > b), \varepsilon = \frac{c}{b} \ (b > a).$$

В будь-якому випадку $0 \le \varepsilon < 1$.

З вище приведених формул для відношення осей дістаємо:

$$\text{якщо } (a > b), \text{ то } \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a^2} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{1-\varepsilon^2},$$

$$\text{якщо } (b > a), \text{ то } \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{b^2-c^2}}{b^2} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2}} = \sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

Отже, якщо $\varepsilon = 0$, то $b = a$, тобто еліпс перетворюється в коло; $\varepsilon \to 1$, то відношення осей b/a (a/b) зменшується, тобто еліпс все більше розтягується вздовж осі Ox (Oy).

Відстані $F_1M = r_1$ та $F_2M = r_2$ точки $M = (x, y)$ еліпса до його фокусів називаються *фокальними радіусами* точки M і визначаються за формулами:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x, a > b, r_1 = b + \varepsilon y, \quad r_2 = b - \varepsilon y, \ b > a.$$

Прямі паралельні до малої осі еліпса, називаються *директрисами еліпса*

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{a^2}{c}, a > b, \qquad x = \pm\frac{b}{\varepsilon} = \pm\frac{b^2}{c}, b > a.$$

Рівняння дотичної до еліпса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ у точці $M_0(x_0, y_0)$

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Еліпс з центром у точці $C_0(x_0, y_0)$ має вигляд

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

3. Гіпербола

Гіперболою називають геометричне місце точок, різниця відстаней від кожної з яких до двох фіксованих точок F_1, F_2 є величина стала $2a$ $(0 < 2a < F_1F_2)$.

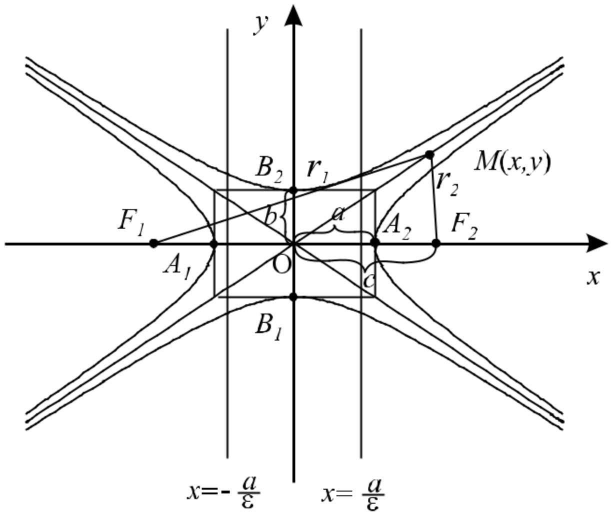

Рис. 12

Тобто, для будь-якої точки M виконується умова $|F_1M - F_2M| = 2a$.

Канонічне рівняння гіперболи (див. рис. 12) має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > 0, b > 0. \qquad (6)$$

Параметри $2a$, $2b$ – називаються *дійсною і уявною осями* гіперболи (6); a, b – її *півосі*; точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ – *вершини*, Ox і Oy – *дійсна і уявна осі симетрії*, $O(0, 0)$ – *центр гіперболи*.

Прямі $y = \pm\frac{b}{a}$ називаються *асимптотами гіперболи.* Точки $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, де $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, –*фокуси гіперболи*. Відстань між фокусами $2c$. Число $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ – *ексцентриситет гіперболи*. Відстані r_1 та r_2 від точки $M(x, y)$ гіперболи до її фокусів називаються *фокальними радіусами* цієї точки і визначаються за формулами:

$$r_1 = \varepsilon x - a, \qquad r_2 = \varepsilon x + a,$$

за умови, що точка $M(x, y)$ лежить на правій вітці гіперболи. Прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ – *директриси гіперболи*.

Гіпербола, для якої $a = b$, називається рівносторонньою, її рівняння $x^2 - y^2 = a^2$, а рівняння асимптот має вигляд $y = \pm x$.

Гіпербола, рівняння якої має вигляд

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \qquad (7)$$

називається *спряженою з гіперболою* (6).

Дотична до гіперболи (6) у точці $M_0(x_0, y_0)$ визначається рівнянням

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Гіпербола з центром у точці $C_0(x_0, y_0)$ має вигляд

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Рівняння асимптот гіперболи $y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0)$.

4. Парабола

Параболою називають геометричне місце точок площини, що знаходяться на однаковій відстані від даної точки (фокуса) і даної прямої (директриси).

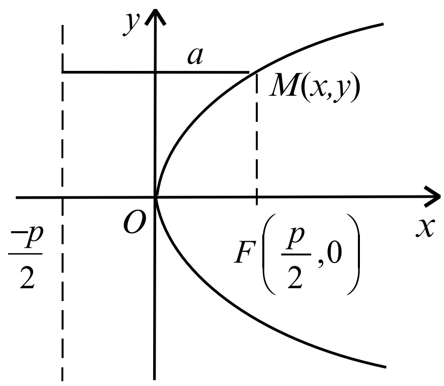

Рис. 13

Є два вигляди канонічного рівняння параболи:

$$y^2 = 2px \qquad (8)$$

– парабола симетрична відносно осі Ox (рис. 13), $p > 0 -$ параметр параболи;

$$x^2 = 2py \qquad (9)$$

– парабола симетрична відносно осі Oy.

В обох випадках вершина параболи, тобто точка $O(0,0)$, яка лежить на осі симетрії Ox (Oy), знаходиться в початку координат.

Парабола (8) має фокус $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ і директрису $x = -\frac{p}{2}$; фокальний радіус-вектор точки $M(x,y)$ параболи визначається рівнянням $r = x + \frac{p}{2}$.

Парабола (9) має фокус $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$ і директрису $y = -\frac{p}{2}$; фокальний радіус-вектор точки $M(x,y)$ параболи визначається рівнянням $r = y + \frac{p}{2}$.

Ексцентриситет параболи $\varepsilon = 1$.Дотична до параболи $y^2 = 2px$ в точці $M_0(x_0,y_0)$ визначається рівністю $yy_0 = p(x + x_0)$. Рівняння параболи з вершиною в точці $C_0(x_0,y_0)$ має вигляд $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$.