Лекція 21. Невласні інтеграли

План

1. Невласні інтеграли I роду.
2. Ознаки збіжності невласних інтегралів I роду.
3. Невласні інтеграли другого роду

1. Невласні інтеграли I роду (з нескінченими межами)

Як відомо, ми розглядали визначений інтеграл на скінченному відрізку $[a;b]$. Проте у ряді задач стає потреба розглядати інтеграли на нескінченних проміжках $[a;\infty)$, $(-\infty;b]$, $(-\infty;+\infty)$. Отже, нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;+\infty)$ і є неперервною на будь-якому відрізку $[a;B]$ де $B > a$. Тоді існує визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, який є функцією своєї верхньої межі.

Означення 1. *Невласним інтегралом першого роду* функції $f(x)$ на проміжку $[a;+\infty)$ називають границю $\lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_a^B f(x)dx$ і записують

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty}\int\limits_a^B f(x)dx \qquad (1)$$

У цьому випадку інтеграл називають *збіжним,* якщо границя скінченна і *розбіжним,* якщо границя не існує або нескінченна, а підінтегральну функцію – *інтегровною на проміжку* $[a;+\infty)$. Нехай тепер функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty;b]$ і є неперервною на будь-якому відрізку $[A;b]$, де $A < b$.

Означення 2. *Невласним інтегралом першого роду* функції $f(x)$ на проміжку $(-\infty;b]$ називають границю $\lim\limits_{A\to-\infty}\int\limits_A^b f(x)dx$ і записують

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int\limits_A^b f(x)dx. \qquad (2)$$

Якщо функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty;+\infty)$ і неперервна на будь-якому відрізку $[a;b]$, то можна означити інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{C} f(x)dx + \int\limits_{C}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (3)$$

де C - довільне дійсне число. Інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int\limits_A^C f(x)dx + \lim_{B\to+\infty}\int\limits_C^B f(x)dx \qquad (4)$$

називається також *невласним інтегралом першого роду* функції $f(x)$ на проміжку $(-\infty;+\infty)$.

При цьому, якщо обидва інтеграли в правій частині рівності (3) збігаються, то невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають *збіжним*. Якщо хоча б один з інтегралів правої частини рівності (3) розбігається, то невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають *розбіжним*.

Варто відзначити, що іноді питання про збіжність (розбіжність) невласного інтеграла можна вирішити не обчислюючи його. При цьому користуються таксваними ознаками збіжності невласних інтегралів.

2. Ознаки збіжності невласних інтегралів першого роду

1. Ознака порівняння.

Якщо на проміжку $[a;+\infty)$ функції $f(x)$ і $g(x)$ – неперервні і задовольняють умову $0 \le f(x) \le g(x)$, то із збіжності інтеграла $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$, а із розбіжності інтеграла $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$.

2. Гранична ознака порівняння.

Якщо існує границя $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$, $0<k<+\infty$, ($f(x)>0$, $g(x)>0$), то інтеграли $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ і $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ або одночасно обидва збігаються, або одночасно розбігаються.

Наслідки. а) Якщо $k=0$, то із збіжності $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ випливає збіжність $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$;

б) Якщо $k=+\infty$, то із розбіжності $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ випливає розбіжність $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$.

3. Якщо інтеграл $\int_{a}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ збігається, то збігається і інтеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$, причому в цьому випадку він називається *абсолютно збіжним.*

Зауваження. Найчастіше при дослідженні інтегралів першого роду для порівняння використовують функції $\frac{\mathbf{1}}{x^{\alpha}}$, оскільки відомо, що інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ $(a>0)$ збігається при $\alpha>1$ і розбігається при $0<\alpha\le 1$.

Приклад.

Дослідити на збіжність (розбіжність) і обчислити інтеграли.

1. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}$.

Згідно з формулою (1) матимемо:

$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_{1}^{B}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{B\to+\infty}\ln|x|\Big|_{1}^{B}=\lim\limits_{B\to+\infty}\left(\ln|B|-\ln 1\right)=\lim\limits_{B\to+\infty}\ln|B|=+\infty$. Границя нескінченна, отже, інтеграл розбігається.

2. $\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-4x+1}dx$.

$$\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-4x+1}dx=\lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_{0}^{B}e^{-4x+1}dx=-\frac{1}{4}\lim\limits_{B\to+\infty}e^{-4x+1}\Big|_{0}^{B}=-\frac{1}{4}\lim\limits_{B\to+\infty}\left(e^{-4B+1}-e^{1}\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}\lim\limits_{B\to+\infty}e^{-4B+1}+\frac{1}{4}\lim\limits_{B\to+\infty}e=-\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot e=\frac{e}{4}.$$

Границя скінченна, заданий інтеграл збігається.

3. Невласні інтеграли другого роду

Як відомо, необхідною умовою інтегровності функції на відрізку $[a;b]$ є її обмеженість. Проте є задачі, що приводять до розгляду інтеграла від функції, яка майже на всьому відрізку обмежена і стає необмеженою поблизу деякої точки, наприклад, поблизу однієї чи обох меж. Тоді природньо поширити поняття визначеного інтеграла і на такі функції, ввівши при цьому додаткові означення.

Отже, нехай функція $f(x)$ задана на відрізку $[a;b]$, крім, можливо, кінців, і є необмеженою, наприклад, поблизу точки $x=a$, зокрема на відрізку $[a;a+\varepsilon]$, де $0<\varepsilon<b-a$. Нехай $f(x)$ є обмеженою і інтегровною на будь-якому відрізку $[a+\varepsilon;\, b]$. Точку *a* при цьому називають *особливою точкою* функції $f(x)$.

Означення 1. *Невласним інтегралом другого роду* функції $f(x)$ на проміжку $(a;b]$ називається границя $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx$ і позначають

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx\ . \qquad (1)$$

Якщо ця границя скінченна, то інтеграл називається *збіжним*. Якщо границя нескінченна, або взагалі не існує, тоді інтеграл називається *розбіжним*. Функція $f(x)$ при цьому називається інтегровною на данному проміжку.

Нехай тепер функція $f(x)$ є обмеженою і інтегровною на будь-якому відрізку $[a;b-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<b-a$ і не є інтегровною на відрізку $[b-\varepsilon;b]$.

Означення 2. *Невласним інтегралом другого роду* функції $f(x)$ на проміжку $[a;b)$ називається границя $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ і позначають

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (2)$$

У цьому випадку точка b вважається *особливою точкою* функції $f(x)$.

Розглянемо випадок, коли особливими точками функції є одночасно точки $x=a$ й $x=b$. Це означає, що функція $f(x)$ необмежена на $[a;a+\varepsilon]$ та на $[b-\varepsilon;b]$, а на будь-якому відрізку $[\alpha;\beta]\subset(a;b)$ вона є інтегровною. Тоді покладають $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$, де $x=c$ – довільна точка інтервалу $(a;b)$. В цьому разі

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{c} f(x)dx+\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_c^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (3)$$

Іноді може трапитися випадок, коли підінтегральна функція $f(x)$ є необмеженою поблизу точки $x=c$, яка знаходиться всередині відрізка $[a;b]$. В інших частинах відрізка $[a;b]$ функція $f(x)$ інтегровна. Тобто точка $x=c$ є *особливою точкою* функції $f(x)$.

Тоді покладають $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$, але тепер у цій рівності обидва інтеграла правої частини означаються формулами (1) та (2). Позначають:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \qquad (4)$$

Зауважимо, що ознаки збіжності невласних інтегралів другого роду аналогічні подібним ознакам для інтегралів першого роду. При дослідженні на збіжність інтегралів, де особливою точкою є точка $x=a$, для порівняння використовують функції $\frac{1}{(x-a)^\alpha}$, інтеграл від яких $\int\limits_a^b\frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ збігається, якщо $0<\alpha<1$ і розбігається, якщо $\alpha\ge1$. Якщо особливою точкою функції $f(x)$ є точка $x=b$, використовують функції $\frac{1}{(b-x)^\alpha}$, інтеграл від яких $\int\limits_a^b\frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ так само збігається при $0<\alpha<1$ і розбігається при $\alpha\ge1$.

Приклади. Дослідити на збіжність (розбіжність) і обчислити інтеграли.

1. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^{1} =$

$$= 2\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\sqrt{1}-\sqrt{\varepsilon}\right) = 2\lim_{\varepsilon\to+0}1 - 2\lim_{\varepsilon\to+0}\sqrt{\varepsilon} = 2\cdot1-2\cdot0 = 2\,.$$

Границя існує і скінченна, отже інтеграл збігається.

2. $\int\limits_2^4 \frac{dx}{4-x} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_2^{4-\varepsilon} \frac{dx}{4-x} = -\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \ln|4-x| \Big|_2^{4-\varepsilon} =$

$$= -\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|4-4+\varepsilon| - \ln|4-2|\right) = -\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\varepsilon + \lim_{\varepsilon\to+0}\ln 2 = \infty,$$

оскільки перша границя нескінченна (при $\varepsilon\to+0$ $\ln\varepsilon\to-\infty$). Тобто наш інтеграл розбігається.