РОЗДІЛ 3. ВІДНОШЕННЯ НА МНОЖИНАХ

Лекція 6. Бінарні відповідності та їх типи

План

1. Поняття бінарної відповідності

2. Способи задання відповідностей

3. Типи відповідностей

4. Операції над відповідностями

1. Поняття бінарної відповідності

Означення. **Упорядкованою парою** називається двоелементна множина у якій вказано порядок слідування елементів. Позначається $\langle a, b\rangle$ або (a, b). Тут $a -$ перша компонента, $b -$ друга компонента.

Відмітимо, що $\{a, b\} = \{b, a\}$, але $(a, b) \neq (b, a)$.

Означення. $\big((a, b) = (c, d)\big) \leftrightarrow (a = c \wedge b = d)$.

Означення. **Прямим (декартовим) добутком** множини A на множину B називається множина усіх впорядкованих пар, першою компонентою яких є елемент з множини A, другою $-$ елемент з множини B. Позначається $A \times B$.

$$A \times B = \{(a, b): a \in A \wedge b \in B\}.$$

Очевидно, що

$$A \times B \neq B \times A.$$

Означення. $A \times A -$ **декартів квадрат**.

Означення. **Кортежем довжини n (упорядкованою n -кою)** називається n елементна множина, у якій вказано порядок слідування елементів. Позначається $\langle a_1, a_2, \dots, a_n\rangle$ або $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Означення.

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n): a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\}$$

називається **декартовим добутком довжини n.**

Означення. **Відповідністю** між множинами A і B називається будь-яка підмножина прямого добутку цих множин.

Відповідності позначаються малими буквами грецького алфавіту. Наприклад, $\alpha \subset A \times B$ (чит. альфа підмножина прямого добутку A на B) або $A \xrightarrow{\alpha} B$ (чит. A відображається в B у відповідності α).

Множину A називають **множиною відправлення**, множину $B -$ **множиною прибуття.** Якщо між елементами пари (a, b) існує відповідність α, то символічно це записують $(a, b) \in \alpha$ або $a\alpha b$ (чит. a перебуває у відповідності альфа з b).

Означення. Множина усіх перших компонент відповідності α називається **областю визначення** (позначається $Dom\ \alpha$), множина усіх других компонент $-$ **область значень** ($Im\ \alpha$).

2. Способи задання відповідностей

I. Переліком елементів

Існують такі форми переліку: матриця, граф, графік.

Наприклад. Нехай $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{3; 4; 5\}$.

Відповідність $\alpha = \{(1; 3), (1; 4), (3; 3), (3; 4)\}$.

Матриця відповідності має вигляд

A, B	3	4	5
1	1	1	0
2	0	0	0
3	1	1	0
4	0	0	0

Означення. Графом називається система точок (вершин графа) і стрілок (ребер графа), які сполучають деякі з цих точок. У графа від першої компоненти іде стрілка до другої.

II. Характеристичною властивістю

Характеристична властивість формується у вигляді речення з двома змінними.

Означення. Нехай маємо відповідність $A \xrightarrow{\alpha} B$. **Образом** елемента $a \in A$ називається множина тих $b \in B$, для яких пара $(a, b) \in \alpha$. Позначають $\alpha(a)$.

Прообразом елемента $b \in B$ називається множина тих $a \in A$ для яких $(a, b) \in \alpha$. Позначають $\alpha^{-1}(b)$.

3. Типи відповідностей

1) Порожня $\alpha = \emptyset$. Матриця такої відповідності складається лише з нулів, а граф має лише вершини.

2) Повна $\alpha = A \times B$. Матриця такої відповідності складається лише з одиниць, а у графа від кожної вершини першої множини іде стрілка до кожної вершини другої множини.

3) Сур'єктивна – це відповідність на всю множину прибуття

$$\alpha \subset A \times B \text{ і } \alpha(A) = B.$$

У графа такої відповідності до кожного елементу множини B іде стрілка.

4) Ін'єктивна $\alpha \subset A \times B$. Якщо $x \neq y$, то $\alpha(x) \neq \alpha(y)$. У графа такої відповідності до кожного елемента множини B іде ода стрілка.

5) Бієктивна – це сур'єктивна та ін'єктивна відповідності одночасно.ЇЇ ще називають взаємнооднозначною.

6)

7) Функціональна – образи елементів з множини A або порожні, або містять лише по одному елементу.

4. Операції над відповідностями

Оскільки відповідності це множини, тому над ними виконуються ті ж операції, що й над множинами і ще дві специфічні: операція композиція та операція обертання.

Означення. **Доповненням** відповідності $\alpha \subset A \times B$ називають таку відповідність α' для якої виконується

$$\alpha' \cup \alpha = A \times B, \ \ \alpha' \cap \alpha = \emptyset$$

Означення. Композицією (добутком, суперпозицією) відповідностей $\alpha \subset A \times B$ і $\beta \subset B \times C$ називається відповідність $\gamma \subset A \times C,$ яка складається з тих пар (a, c), для яких існує елемент $b \in B$, такий, що $(a, b) \in \alpha$ і $(b, c) \in \beta$.

Можна показати, що

$$\alpha^\circ\beta \neq \beta^\circ\alpha$$

$$(\alpha^\circ\beta)^\circ\gamma = \alpha^\circ(\beta^\circ\gamma)$$

Окремим випадком композиції є функціональна відповідність.

Теорема. Композиція двох функціональних відповідностей є функціональна відповідність.

Означення. Композиція $\varphi^\circ\omega$ двох функціональних відповідностей називається **складною** функцією.

Означення. Оберненою до відповідності α називають відповідність α^{-1}, що складається з пар (y, x) таких, що $(x, y) \in \alpha$

$$\alpha^{-1} = \{\, (y, x) : (x, y) \in \alpha\}$$

Можна показати, що

$$(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$$

$$(\alpha^\circ\beta)^{-1} = \beta^{-1\circ}\alpha^{-1}$$