

Лекція 7. Відношення на множинах

План

1. Відношення на множинах. Типи відношень
2. Відношення еквівалентності та розбиття множини
3. Відношення порядку

1. Відношення на множинах. Типи відношень

Означення. Відношенням називається відповідність між елементами однієї і тієї ж множини.

Відношення як і відповідності зображуються у вигляді графа. Проте елементи множини зображуються один раз і розміщуються довільним чином.

Означення. Бінарне відношення α задане на множині A називається

- **рефлексивним** на A , якщо $\forall a \in A: a\alpha a$. Приклад: паралельність прямої на площині.
- **антирефлексивним** на A , якщо $\forall a \in A: \overline{a\alpha a}$. Приклад: перпендикулярність на множині усіх прямих площини.
- **нерефлексивним** на A , якщо $\exists a \in A: \overline{a\alpha a}$.

Особливість графа рефлексивного відношення є наявність петель у кожній вершині, у антирефлексивного немає жодної петлі, у нерефлексивного частина вершин мають петлі, а частина ні.

- **симетричним** на A , якщо $\forall a, b \in A: a\alpha b \rightarrow b\alpha a$. Приклад: паралельність на множині прямих.
- **асиметричним** на A , якщо $\forall a, b \in A: a\alpha b \rightarrow \overline{b\alpha a}$. Приклад: " $<$ " на множині натуральних чисел.
- **антисиметричним** на A , якщо $\forall a, b \in A: (a\alpha b \wedge b\alpha a) \rightarrow (a = b)$. Приклад: " \leq " на множині натуральних чисел.

Особливість графа симетричного відношення – усі стрілки подвійні, асиметричного – усі стрілки напрямлені, антисиметричного – усі стрілки напрямлені і є петлі.

- **транзитивним** на A , якщо $\forall a, b, c \in A: (aab \wedge bac) \rightarrow (aac)$.

Приклад: " $<$ " на множині натуральних чисел.

Особливість графа транзитивного відношення – трикутники відсутні або усі замкнені.

- **досконалим (зв'язним)** на A , якщо $\forall a, b \in A: (a \neq b) \rightarrow (aab \vee baa)$. Приклад: " $<$ " на множині натуральних чисел.

Особливість графа досконалиго відношення – будь-які дві його різні вершини сполучені ребром.

Теорема 1. Нехай $|X| = n$. Число усіх бінарних відношень, які можна означити на множині X рівне 2^{n^2} .

Доведення. Задати бінарне відношення на множині X означає вказати деяку підмножину декартового добутку $X \times X$. Цей декартів добуток містить n^2 – елементів. Тому число усіх підмножин 2^{n^2} .

Означення. Множину $D = \{(x, x): x \in X\}$ називають **діагональною**.

Теорема 2. Число усіх рефлексивних відношень на множині X рівне 2^{n^2-n}

Доведення. Кожне рефлексивне відношення містить діагональ D і ще деяку підмножину складену з елементів, які знаходяться «ззовні діагоналі». Число таких елементів $n^2 - n$. Тому і число рефлексивних відношень 2^{n^2-n} .

Теорема 3. Число усіх симетричних бінарних відношень, які можна визначити на множині X рівне $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Доведення. Графік симетричного відношення $\alpha \subset X \times X$ разом з парою $(x, x') \in \alpha$, $x \neq x'$ містить пару (x', x) . Тому графік однозначно визначається, якщо вказати: а) які пари $(x, x) \in D \subset \alpha$ він містить, б) які пари $(x, x'), x \neq x'$ він містить. Число підмножин складених з пар виду а) рівне 2^n . Число підмножин складених з пар виду б) рівне $2^{C_n^2} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Число усіх симетричних відношень буде $2^n \cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

2. Відношення еквівалентності та розбиття множини

Означення. Бінарне відношення α задане на множині A називається відношенням еквівалентності, якщо воно: рефлексивне, симетричне, транзитивне.

Приклад: відношення «бути паралельним» на множині прямих.

Особливості графа відношення еквівалентності:

1. у кожній вершині графа є петля.
2. Усі стрілки подвійні.
3. Усі наявні трикутники замкнуті.

Означення. Два цілі числа a, b називаються **порівнювані по модулю m** , якщо їх різниця ділиться на m

$$a \equiv b \pmod{m} \leftrightarrow ((a - b) : m)$$

Можна довести, що відношення порівнювання по модулю m є відношенням еквівалентності на множині Z .

Означення. Елементи a, b , які належать множині A називаються еквівалентними, якщо $a \alpha b$.

Означення. **Класом еквівалентності**, який породжений елементом a , називається множина усіх елементів множини A , які еквівалентні елементу a .

Позначається a/α (клас еквівалентності породжений елементом a).

Означення. Множина усіх класів еквівалентності множини A за відношенням еквівалентності α називається **фактор-множиною**.

Позначається A/α .

Означення. Множина \mathfrak{M} непорожніх підмножин A називається **розбиттям множини A на класи**, якщо:

- 1) для $\forall X, Y \in \mathfrak{M}: X = Y$ або $X \cap Y = \emptyset$.
- 2) $\cup X = A, X \in \mathfrak{M}$.

Теорема 1. Фактор-множина множини A за відношенням еквівалентності α утворює розбиття множини A .

Теорема 2. Якщо \mathfrak{M} – розбиття множини A , то існує відношення еквівалентності α на множині A таке, що \mathfrak{M} співпадає з фактор-множиною A/α .

4. Відношення порядку

Означення. Бінарне відношення α задане на множині A називається **відношенням порядку**, якщо воно транзитивне і антисиметричне.

Означення. Відношення порядку називається **нестрогим (частковим)**, якщо воно рефлексивне.

Означення. Непорожня множина A із заданим на ній відношенням часткового порядку називається **частково впорядкованою множиною (ЧВМ)**.

Означення. Елементи ЧВМ називаються **порівнюваними**, якщо

$$a \leq b \vee b \leq a.$$

Означення. Відношення часткового порядку на множині A називається **лінійним порядком**, якщо будь-які два елементи цієї множини є порівнювальними між собою.

Означення. Відношення порядку називається **строгим**, якщо воно антирефлексивне.

Теорема. Якщо відношення α – порядок строгий (нестрогий, лінійний), то обернене відношення α^{-1} порядок строгий (нестрогий, лінійний).