РОЗДІЛ 4. СТАТИСТИЧНІ ОЦІНКИ. СТАТИСТИЧНІ ГІПОТЕЗИ

Тема 13. Точкові статистичні оцінки параметрів розподілу. Оцінки мінімальної дисперсії.

Теоретичні відомості

Оцінка параметра розподілу сукупності θ у загальному випадку є випадковою величиною, яка визначається за даними вибірки і використовується замість невідомого значення параметра, який потрібно оцінити. Статистична оцінка θ^*, яка визначається одним числом, точкою, називається *точковою*.

Оцінки параметрів розподілу знаходять *методами максимальної правдоподібності* і *моментів.*

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. За методом моментів знайти оцінку параметра p геометричного розподілу за даними вибірки обсягом n.

Розв'язання. Геометричний закон розподілу визначається формулою: $P\left(X=m\right)=p\left(1-p\right)^{m-1}$, $m=1,2,...$ Оскільки потрібно знайти оцінку одного параметра, зрівнюємо теоретичні і статистичні початкові моменти першого порядку:

$$\theta = MX = \frac{1}{p};\ \theta^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x};\ \frac{1}{p} = \overline{x};\ \widehat{p} = \frac{1}{\overline{x}}.$$

Приклад 2. Граничне навантаження на сталевий болт x_i, що вимірювалось в лабораторних умовах, задано як інтервальний статистичний розподіл:

x_i, км/мм^2	4,5—5,5	5,5—6,5	6,5—7,5	7,5—8,5	8,5—9,5	9,5—10,5	10,5—11,5	11,5—12,5	12,5—13,5	13,5—14,5
n_i	40	32	28	24	20	18	16	12	8	4

Визначити точкові незміщені статистичні оцінки для $\overline{X}_{\text{Г}} = M\left(x\right)$, $D_{\text{Г}}$.

Розв'язання. Для визначення точкових незміщених статистичних оцінок $\overline{x}_{\text{В}}, S^2$ перейдемо від інтервального статистичного розподілу до дискретного, який набирає такого вигляду:

$x_i^* = x_{i-1} + \frac{h}{2}$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n_i	40	32	28	24	20	18	16	12	8	4

Обчислимо $\overline{x}_{\text{В}}$: $n = \sum n_i = 202$,

$$\overline{x}_{\text{В}} = \frac{\sum x_i^* n_i}{n} = \frac{5\cdot 40 + 6\cdot 32 + 7\cdot 28 + 8\cdot 24 + 9\cdot 20 + 10\cdot 18 +}{202}$$

$$\frac{+11\cdot 16 + 12\cdot 12 + 13\cdot 8 + 14\cdot 4}{202} = \frac{1620}{202} = 8{,}02 \text{ кг/мм}^2.$$

Отже, точкова незміщена статистична оцінка для $\overline{X}_{\Gamma} = M(x)$, $\overline{x}_{\text{В}} = 8,02$ кг/мм^2.

Для визначення S^2 обчислимо $D_{\text{В}}$:

$$\frac{\sum\left(x_i^*\right)^2 n_i}{n} = \frac{(5)^2\cdot 40 + (6)^2\cdot 32 + (7)^2\cdot 28 + (8)^2\cdot 24 + (9)^2\cdot 20 +}{202}$$

$$\frac{+(10)^2\cdot 18 + (11)^2\cdot 16 + (12)^2\cdot 12 + (13)^2\cdot 8 + (14)^2\cdot 4}{202} = \frac{14280}{202} \approx 70,69.$$

$$D_{\text{В}} = \frac{\sum\left(x_i^*\right)^2 n_i}{n} - \left(\overline{x}_{\text{В}}\right)^2 = 70,69 - (8,02)^2 = 70,69 - 64,32 \approx 6,37 \text{ кг/мм}^2.$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{В}} = \frac{202}{202-1}\cdot 6,37 = \frac{202}{201}\cdot 6,37 \approx 6,4.$$

Звідси точкова незміщена статистична оцінка для D_{Γ} є $S^2 = 6,4$ кг/мм^2.

Задачі

13.1. Із нормально розподіленої сукупності з $DX = \sigma^2$ зроблено вибірку обсягом *n*. Знайти оцінку для *MX*. Перевірити її на незміщеність, ефективність та обґрунтованість.

13.2. Із нормально розподіленої сукупності з *MX*=*a* зроблено вибірку обсягом *n*. Знайти оцінку для *DX*. Перевірити її на незміщеність, ефективність та обґрунтованість.

13.3. Із сукупності, розподіл у якій задається щільністю $f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}( )} (x > 0)$, зроблено вибірку обсягом *n*. Знайти оцінку для μ і перевірити її на незміщеність, ефективність та обґрунтованість (значення σ^2 відоме).

13.4. Із сукупності зі щільністю:

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-a(x-\mu)^2}, & \text{якщо } x \geq \mu, \\ 0, & \text{якщо } x < \mu \end{cases}$$

зроблено вибірку обсягом *n*. Знайти оцінки для a і μ.

13.5. Із сукупності зі щільністю:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{\ln x - \mu}{2\sigma^2}\right)^2}, & \text{якщо } x > 0, \\ 0, & \text{якщо } x \leq 0 \end{cases}$$

зроблено вибірку обсягом *n*. Знайти оцінки для μ і σ^2.