

## Лекція 15. Застосування похідної

### План

1. Розкриття невизначеності виду  $\left(\frac{0}{0}\right)$  та  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$
2. Перетворення невизначеностей виду  $(0 \cdot \infty)$ ;  $(0^0)$ ;  $(\infty^0)$ ;  $(1^\infty)$ ;  $(\infty - \infty)$  до виду  $\left(\frac{0}{0}\right)$  або  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$
3. Формула Тейлора для многочлена
4. Формула Тейлора для функції. Різні форми залишкового члена
5. Розклад за формулою Маклорена функцій  $e^x$ ;  $\sin x$ ;  $\cos x$ ;  $\ln(1+x)$ .

### 1. Розкриття невизначеності виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ та $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

**Теорема 1 (Перше правило Лопіталя).** Нехай функції  $f(x), \varphi(x)$  є неперервними і диференційованими в деякому околі точки  $x_0$ , за винятком, можливо, самої точки  $x_0$ , причому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0, \quad \varphi'(x) \neq 0.$$

Тоді, якщо існує  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = k$ , то обов'язково  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k$ .

**Теорема 2.** Нехай функції  $f(x), \varphi(x)$  визначені при  $x > a$  є диференційованими на цій множині і  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ . Тоді, якщо існує

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}, \text{ то обов'язково } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

**Теорема 2 (Друге правило Лопіталя).** Нехай функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  визначені і диференційовні в околі точки  $x_0$  і в цьому околі

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty, \quad \varphi'(x) \neq 0.$$

Тоді, якщо існує границя  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ , то існує границя  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$  і

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Приклад. Знайти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{2x}$ .

Виконавши граничний перехід, дістанемо невизначеність вигляду  $\left(\frac{0}{0}\right)$ .

Застосовуємо перше правило Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 7x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \cos x}{2} = \frac{7}{2}.$$

## 2. Перетворення невизначеностей виду

$(0 \cdot \infty)$ ;  $(0^0)$ ;  $(\infty^0)$ ;  $(1^\infty)$ ;  $(\infty - \infty)$  до виду  $\left(\frac{0}{0}\right)$  або  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Правило Лопіталя можна застосувати тільки для розкриття невизначеностей виду  $\left(\frac{0}{0}\right)$  або  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ . При розкритті інших типів невизначеностей їх перетворюють до одного з цих видів.

**Невизначеність виду  $(0 \cdot \infty)$ .** Нехай  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = \infty$ .

Потрібно знайти  $\lim_{x \rightarrow a} (u(x) \cdot v(x))$ . Це невизначеність типу  $(0 \cdot \infty)$ . Якщо даний вираз записати у вигляді

$$\lim_{x \rightarrow a} u \cdot v = \lim_{x \rightarrow a} \frac{u}{\frac{1}{v}} \text{ або } \lim_{x \rightarrow a} u \cdot v = \lim_{x \rightarrow a} \frac{v}{\frac{1}{u}},$$

то при  $x \rightarrow a$  дістанемо невизначеність відповідно вигляду

**Невизначеність виду  $(0^0)$ ;  $(\infty^0)$ ;  $(1^\infty)$ .** Нехай маємо функцію  $u(x)^{v(x)}$ .

При  $x \rightarrow a$  ( $a$  — скінченне або нескінченне) можливі три випадки:

а)  $u \rightarrow 0$ ,  $v \rightarrow 0$  маємо невизначеність виду  $(0^0)$ ;

б)  $u \rightarrow \infty$ ,  $v \rightarrow 0$  дістанемо невизначеність  $(\infty^0)$ ;

в)  $u \rightarrow 1$ ,  $v \rightarrow \infty$  маємо невизначеність виду  $(1^\infty)$ .

Ці невизначеності за допомогою логарифмування зводяться до невизначеності вигляду  $(0 \cdot \infty)$ . Справді, позначимо дану функцію через  $y$ ,

тобто візьмемо  $y = u^v$ . Прологарифмувавши цю рівність, дістанемо  $\ln y = v \cdot \ln u$  ( $u > 0$ ).

Легко перевірити, що при  $x \rightarrow a$  добуток  $v \cdot \ln u$  буде невизначеністю  $(0 \cdot \infty)$  для всіх трьох випадків.

Відповідно до підпункту 1 розкриємо невизначеність  $(0 \cdot \infty)$ , тобто знайдемо границю  $\lim_{x \rightarrow a} \ln y = k$  ( $k$  — скінченне або  $\infty$ ).

$$\text{Звідси } \lim_{x \rightarrow a} y = \lim_{x \rightarrow a} u^v = e^k.$$

**Невизначеність  $(\infty - \infty)$ .** Якщо функції  $u(x) \rightarrow \infty$ ,  $v(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow a$  ( $a$  — скінченне або нескінченне), то різниця  $(u - v)$  при  $x \rightarrow a$  дає невизначеність  $(\infty - \infty)$ . Остання з допомогою алгебраїчних перетворень зводиться до невизначеності  $\left(\frac{0}{0}\right)$  або  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ .

Приклад. Знайти границю  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$ .

Маємо невизначеність виду  $(\infty - \infty)$ . Алгебраїчним перетворенням приведемо цю невизначеність до невизначеності  $\left(\frac{0}{0}\right)$ , а потім двічі застосуємо правило Лопіталя:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

### 3. Формула Тейлора для многочлена

Як відомо, многочленом  $n$ -го степеня називають функцію виду

$$P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Запис многочлена  $P_n(x)$  у вигляді

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)^2 + C_3(x - x_0)^3 + \dots + C_n(x - x_0)^n \quad (1)$$

називають *розкладом многочлена за степенями  $(x - x_0)$* .

Покладемо в рівності (1)  $x = x_0$ , тоді одержимо  $P_n(x_0) = C_0$ .

Продиференціюємо рівність (1)

$$P'_n(x) = C_1 + 2C_2(x - x_0) + 3C_3(x - x_0)^2 + \dots + nC_n(x - x_0)^{n-1}. \quad (2)$$

Покладаючи в рівності (2)  $x = x_0$  знайдемо  $P'_n(x_0) = C_1$ . Продиференціюємо рівність (2)

$$P''_n(x) = 2 \cdot 1C_2 + 3 \cdot 2C_3(x - a) + \dots + n(n-1)C_n(x - a)^{n-2}. \quad (3)$$

Покладаючи в рівності (3)  $x = x_0$  знайдемо  $P''_n(x_0) = 2C_2$ . Продовжуючи аналогічно будемо мати

$$6C_3 = P'''_n(x_0),$$

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1c_4 = P^{(4)}_n(x_0),$$

$$n!c_n = P^{(n)}_n(x_0).$$

Як бачимо, коефіцієнти в ряді (1) обчислюються за формулами

$$C_0 = P_n(x_0), \quad C_1 = P'_n(x_0) = \frac{P'_n(x_0)}{1!}, \quad C_2 = \frac{P''_n(x_0)}{2} = \frac{P''_n(x_0)}{2!}, \quad C_3 = \frac{P'''_n(x_0)}{3!}, \dots,$$

$$c_n = \frac{P^{(n)}_n(x_0)}{n!}.$$

Завдяки цьому рівність (1) можна записати у вигляді

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P'_n(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P''_n(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{P'''_n(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{P^{(n)}_n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (4)$$

Рівність (4) називають *формулою Тейлора для многочлена*.

#### **4. Формула Тейлора для функції. Різні форми залишкового члена**

Візьмемо деяку функцію  $f(x)$ , визначену в околі точки  $x_0$  і таку, що в точці  $x_0$  має похідні до  $(n+1)$ -го порядку. Тоді по аналогії з формулою Тейлора для многочлена можемо скласти многочлен

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

В загальному випадку цей многочлен не буде рівний  $f(x)$ , тому можна записати  $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ , або у розгорнутому вигляді

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n(x). \quad (5)$$

Доданок  $R_n(x)$  називають залишковим членом. Його шукають з формули

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x-x_0)), \text{ де } 0 < \Theta < 1.$$

Підставивши  $R_n(x)$  в рівність (5) отримуємо формулу Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x-x_0)), \quad (0 < \Theta < 1) \quad (6)$$

Узявши у формулі  $x_0 = 0$ , дістанемо формулу Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\Theta x). \quad (7)$$

### 5. Розклад за формулою Маклорена функцій $e^x$ ; $\sin x$ ; $\cos x$ ; $\ln(1+x)$ .

**Розклад функції  $f(x) = e^x$ .** Послідовно диференціюючи функцію  $e^x$ ,

дістаємо:

$$f(x) = e^x, \quad f(0) = 1;$$

$$f'(x) = e^x, \quad f(0) = 1;$$

.....

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad f(0) = 1.$$

Підставляючи здобуті вирази у формулу Маклорена, маємо:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\Theta x}, \quad 0 < \Theta < 1.$$

При  $x = 1$  маємо формулу для знаходження наближеного значення числа  $e$ :

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{8!} \approx 2,71828,$$

при цьому допущена похибка не перевищує числа  $\frac{3}{9!}$  або 0,00001.

**Розклад функції**  $f(x) = \sin x$ . Знаходимо послідовно похідні від  $f(x) = \sin x$ :

$$f(x) = \sin x, \quad f(0) = 0;$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad f'(0) = 1;$$

.....

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi n}{2};$$

$$f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(n+1)}(\Theta x) = \sin\left(\Theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(0 < \Theta < 1)$$

Підставляючи здобуті значення у формулу Маклорена, дістаємо розклад функції  $f(x) = \sin x$ :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{x^n}{n!} \sin\frac{\pi n}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin\left(\Theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

**Розклад функції**  $f(x) = \cos x$ . Знаходячи значення послідовних похідних при  $x = 0$  від функції  $f(x) = \cos x$  та підставляючи у формулу Маклорена, дістаємо:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{x^n}{n!} \cos \frac{\pi n}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos \left( \Theta x + (n+1) \frac{\pi}{2} \right), \quad |\Theta x| < |x|.$$

**Розклад функції**  $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \frac{(-1)^n}{n+1} \left( \frac{x}{1+\Theta x} \right)^{n+1}, \quad |\Theta x| < |x|.$$