

## Лекція 14. Похідні функції. Диференціал

### План

1. Таблиця похідних
2. Диференціал функції та його застосування
3. Похідні і диференціали вищих порядків
4. Основні теореми диференціального числення

### 1. Таблиця похідних

За аналогією з попередніми прикладами можна дістати похідні від основних елементарних функцій.

#### Таблиця основних елементарних функцій

1.  $(x^n)' = nx^{n-1}$  ( $n$  – будь-яке дійсне число)
2.  $(a^x)' = a^x \ln a$  ( $a > 0, a \neq 1$ )
3.  $(e^x)' = e^x$
4.  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$  ( $a > 0, a \neq 1$ )
5.  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
6.  $(\sin x)' = \cos x$
7.  $(\cos x)' = -\sin x$
8.  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
9.  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
10.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11.  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12.  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
13.  $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Приклад. Обчислити похідну функції  $y = -4 \sin x$ .

Розв'язання.  $y' = (-4 \sin x)' = -4(\sin x)' = -4 \cos x$ .

Приклад. Обчислити похідну функції  $y = \sin \frac{\pi}{8}$ .

Розв'язання.  $y' = \left(\sin \frac{\pi}{8}\right)' = 0.$

Приклад. Обчислити похідну функції  $y = x^3 - \frac{1}{x^4} + 6\sqrt[3]{x^2}.$

Розв'язання.  $y = x^3 - \frac{1}{x^4} + 6\sqrt[3]{x^2} = x^3 - x^{-4} + 6x^{2/3}.$  Знайдемо похідну

$$y' = 3x^2 + 4x^{-5} + 6 \cdot \frac{2x^{-1/3}}{3} = 3x^2 + \frac{4}{x^5} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}.$$

## 2. Диференціал функції та його застосування

Нехай функція  $y = f(x)$  диференційована в точці  $x_0$ . Тоді її приріст у цій точці можна подати у вигляді  $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$

де  $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Отже, доданок  $A\Delta x$  є головною частиною приросту функції, яка лінійно залежить від  $\Delta x$ .

Диференціалом функції  $y = f(x)$  в точці  $x_0$  називається головна частина приросту функції в цій точці, яка лінійно залежить від  $\Delta x$ .

Диференціал функції позначається так:  $dy = A\Delta x$ . Враховуючи, що  $A = f'(x_0)$ , маємо  $dy = f'(x_0)\Delta x$ . Диференціалом незалежної змінної  $x$  називається її приріст:  $dx = \Delta x$ . Отже,

$$dy = f'(x_0)dx.$$

Із останньої формули випливає, що похідну  $f'(x_0)$  можна обчислити як відношення диференціалів:

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}.$$

Оскільки диференціал  $dy$  функції  $y = f(x)$  є головною частиною її приросту, то це дає можливість застосувати диференціал функції в наближених обчисленнях: із наближеної рівності  $\Delta y = dy$ , тобто

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)dx, f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx. \quad (15.1)$$

Приклад. Знайти наближено  $\sqrt{4,001}$ . Розглянемо функцію  $y = \sqrt{x}$ .

Покладемо  $x_0 = 4$ ,  $\Delta x = 0,001$ . Тоді  $\sqrt{4,001} = \sqrt{x_0 + \Delta x}$ . Далі маємо

$$f(x_0) = \sqrt{4} = 2, f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

Отже,  $\sqrt{4,001} \approx 2 + \frac{1}{4} \cdot 0,001 = 2,00025$ .

Нехай тепер маємо складену функцію  $y = f(u), u = \varphi(x)$ , де  $f(u), \varphi(x)$  диференційовані функції в точках  $x_0$  і  $u_0 = \varphi(x_0)$ . Тоді

$$dy = (f(\varphi(x_0)))'_x dx.$$

Так як

$$(f(\varphi(x_0)))'_x = f'_u(u_0)u'_x, \text{ то } dy = f'_u(u_0)u'_x dx.$$

Оскільки  $u'_x dx = du$ , то маємо  $dy = f'_u(u_0)du$ .

Таким чином, якщо функція складена, то форма диференціалу не змінює свого виду. Цю властивість називають *інваріантністю форми диференціалу*.

### 3. Похідні і диференціали вищих порядків

Якщо функція  $y = f(x)$  диференційовна на деякому інтервалі (тобто має похідну в кожній точці інтервалу), то за означенням *похідна другого порядку* (*друга похідна*) цієї функції знаходиться за формулою  $y'' = (y')'$ . Аналогічно *похідна третього порядку* (*третья похідна*)  $y''' = (y'')'$  і т.д.

Нехай функція  $y = f(x)$  диференційована в кожній точці  $x$  деякого проміжку  $X$ . Її диференціал першого порядку  $dy = y'(x)dx$  є функцією двох змінних: аргументу  $x$  і диференціала  $dx$ . Нехай  $f'(x)$  також диференційована в кожній точці  $x$  деякого проміжку  $X$ . Будемо розглядати у виразі  $dy = f'(x)dx$  диференціал  $dx$  як постійний множник. Тоді

$$d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dxdx = f''(x)dx^2.$$

Диференціал  $d(dy)$  називається диференціалом другого порядку і позначається  $d^2y$ . Отже,  $d^2y = f''(x)dx^2$ .

Диференціал  $d(d^{n-1}y)$  від диференціала  $d^{n-1}y$ , взятий при постійному  $dx$  називається диференціалом  $n$ -го порядку функції  $y = f(x)$  і позначається  $d^n y$ . Методом математичної індукції можна встановити, що  $d^n y = f^{(n)}(x)(dx)^n$ . Із останньої формули випливає, що

$$y^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

#### 4. Основні теореми диференціального числення

**Теорема Ферма.** Нехай функція  $f(x)$  визначена на інтервалі  $(a, b)$  і в деякій точці  $x_0 \in (a, b)$  має найбільше або найменше значення. Тоді, якщо в цій точці існує похідна  $f'(x_0)$ , то вона рівна нулю, тобто  $f'(x_0)=0$ .

**Теорема Ролля.** Якщо функція  $f(x)$  визначена на відрізку  $[a, b]$  і вона

- 1) неперервна в кожній точці відрізка  $[a, b]$ ,
- 2) диференційована на інтервалі  $(a, b)$ ,
- 3) на кінцях відрізка  $[a, b]$  приймає рівні значення  $f(a) = f(b)$ , то існує точка  $C \in (a, b)$  така, що  $f'(C)=0$ .

**Теорема Лагранжа.** Якщо функція  $f(x)$  визначена на відрізку  $[a, b]$  і вона

- 1) неперервна в кожній точці відрізка  $[a, b]$ ,
- 2) диференційована на інтервалі  $(a, b)$ , то існує точка  $C \in (a, b)$  така, що

$$f'(C) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Теорема Коші.** Якщо функції  $f(x)$  і  $g(x)$

- 1) неперервні на відрізку  $[a, b]$ ,
- 2) диференційовані на інтервалі  $(a, b)$ , і  $g'(x) \neq 0$ ,  $x \in (a, b)$ , то існує точка  $C \in (a, b)$  така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(C)}{g'(C)}.$$