

## Лекція 16. Застосування похідної до дослідження властивостей функції.

### План

#### 1. Ознака монотонності функції

#### 2. Точки екстремуму

#### 3. Необхідні й достатні умови існування екстремуми функції

#### 4. Знаходження найбільшого й найменшого значення функції на відрізку

#### 1. Ознака монотонності функції

**Теорема.** Якщо функція  $f(x)$  диференційована на інтервалі  $(a, b)$  і  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ) на  $(a, b)$ , то функція  $f(x)$  зростає (спадає).

#### 2. Точки екстремуму

Точка  $x_0$  називається точкою локального максимуму (мінімуму) функції  $f(x)$ , якщо існує  $\delta$  – окіл  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  точки  $x_0$  такий, що  $f(x_0) > f(x)$  ( $f(x_0) < f(x)$ ) для будь-якої відмінної від  $x_0$  точки  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . При цьому саме значення  $f(x_0)$  називається локальним максимумом (мінімумом) функції  $f(x)$ .

Точки максимуму і мінімуму функції  $f(x)$  називаються точками екстремуму або екстремальними точками функції.

#### 3. Необхідні й достатні умови існування екстремуми функції

**Необхідна умова існування локального екстремуму функції.** Якщо в точці  $x_0$  функція  $f(x)$  має екстремум, то існує окіл  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  точки  $x_0$ , в якому значення  $f(x_0)$  є найбільшим або найменшим. Отже, якщо в точці  $x_0$  функція  $f(x)$  диференційована, то згідно теореми Ферма  $f'(x_0) = 0$ .

Зазначимо, що коли функція  $f(x)$  диференційована в точці  $x_0$  і  $f'(x_0) \neq 0$ , то або  $f'(x_0) > 0$ , тобто функція зростає, або  $f'(x_0) < 0$  і функція спадає. Звідси випливає, що функція  $f(x)$  може мати екстремум лише в тих точках, у яких її похідна рівна нулю, або не існує.

Точки, в яких похідна функції рівна нулю, називаються *стаціонарними*. Стаціонарні точки й точки, в яких функція визначена, але її похідна не існує називаються *критичними*.

Отже, для того, щоб функція  $f(x)$  мала в точці  $x_0$  екстремум, необхідно, щоб ця точка була критичною.

**Теорема (достатні умови існування екстремуму функції)** Нехай  $x_0$  – критична точка функції  $f(x)$ ,  $f(x)$  неперервна в точці  $x_0$  і має похідну  $f'(x)$  в усіх точках околу  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  за виключенням, можливо самої точки  $x_0$ .

Тоді

1) якщо  $f'(x) > 0$  для  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  і  $f'(x) < 0$  для  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ , то точка  $x_0$  є точкою максимуму функції  $f(x)$ .

2) Якщо  $f'(x) < 0$  для  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  і  $f'(x) > 0$  для  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ , то точка  $x_0$  є точкою мінімуму функції  $f(x)$ .

3) Якщо  $f'(x)$  в околі  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  має один і той же знак, то  $x_0$  не є точкою екстремуму функції  $f(x)$ .

Із сказаного випливає правило дослідження функції на екстремум. Щоб дослідити функцію  $f(x)$  на екстремум треба:

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти  $f'(x)$  – першу похідну функції  $f(x)$ .
3. Розв'язати рівняння  $f'(x) = 0$  та визначити ті значення  $x$ , при яких  $f'(x) = \infty$  або  $f'(x)$  не існує. Нехай після виконання цих дій одержано точки  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ , які знаходяться в інтервалі  $(a, b)$  області визначення функції.

4. У кожному з інтервалів  $(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n)$  взяти довільну точку і визначити в ній знак першої похідної. Який знак матиме похідна у вибраній точці, такий же знак вона матиме й у відповідному інтервалі.

5. Розглянути знак  $f'(x)$  у сусідніх інтервалах, переходячи послідовно зліва направо від першого інтервалу до останнього. Якщо при цьому знаки  $f'(x)$  у двох сусідніх інтервалах різні. То в критичній точці є екстремум: максимум, якщо знак змінюється з “+” на “-“, мінімум, якщо знак змінюється з

“-“ на “+”. Якщо ж у двох сусідніх інтервалах знак першої похідної не змінюється. То екстремуму у відповідній критичній точці немає.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію  $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$ .

1. Функція визначена в інтервалі  $(-\infty, +\infty)$ .

$$2. y' = x^3 - 2x^2 - 3x.$$

3. Розв'язками рівняння  $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$  є  $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 3$ .

4. В інтервалі  $(-\infty, -1)$   $y' < 0$ , функція спадає; в інтервалі  $(-1, 0)$   $y' > 0$ , функція зростає; інтервалі  $(0, 3)$   $y' < 0$ , функція спадає; в інтервалі  $(3, \infty)$   $y' > 0$ , функція зростає.

5. Точки  $x_1 = -1, x_3 = 3$  є точками мінімуму, а точка  $x_2 = 0$  є точкою максимуму даної функції.

$$6. y_{\min} = 1\frac{5}{12}; y_{\min} = -9\frac{1}{4}; y_{\max} = 2.$$

**Теорема.** Нехай  $x_0$  – стаціонарна точка функції  $f(x)$  і в цій точці існує похідна другого порядку  $f''(x) \neq 0$ . Тоді, якщо  $f''(x) > 0$ , то точка  $x_0$  є точкою мінімуму функції  $f(x)$ , а якщо  $f''(x) < 0$ , то – максимуму.

**Теорема.** Якщо в стаціонарній точці  $x_0$  функції  $f(x)$  перша відмінна від нуля похідна  $f^{(n)}(x_0)$  є похідною парного порядку, то точка  $x_0$  є точкою екстремуму функції: точкою мінімуму, якщо  $f^{(n)}(x_0) > 0$  і точкою максимуму, якщо  $f^{(n)}(x_0) < 0$ . Якщо ж перша відмінна від нуля похідна  $f^{(n)}(x_0)$  є похідною непарного порядку, то точка  $x_0$  не є точкою екстремуму функції.

#### 4. Знаходження найбільшого й найменшого значення функції на відрізку

Для знаходження найбільшого й найменшого значення функції  $f(x)$ , неперервної на відрізку  $[a, b]$ , потрібно знайти всі її локальні екстремуми на цьому відрізку та її значення на кінцях відрізка, тобто  $f(a), f(b)$ . Потім з одержаних значень вибрати найменше й найбільше.