Лекція 17. Застосування похідної до побудови графіка функціїї

План

1. Опуклість та вгнутість кривої. Точки перегину

2. Асимптоти графіка функції

3. Загальна схема дослідження функцій і побудови їх графіків

1. Опуклість та вгнутість кривої. Точки перегину

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі (a, b) і в кожній точці цього інтервалу має скінчену похідну. Тоді в кожній точці $M(x, f(x))$ графіка цієї функції можна провести дотичну, не паралельну осі Oy. Крива, яка є графіком цієї функції, називається гладкою.

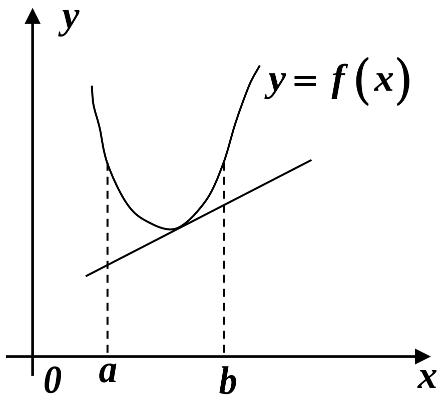

Рис. 20

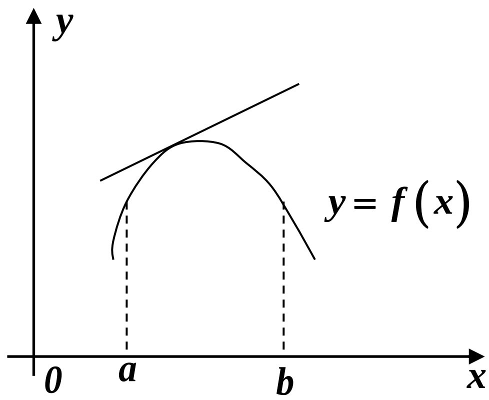

Рис. 21

Якщо крива, яка є графіком функції $y = f(x)$, розміщена не нижче будь-якої дотичної на інтервалі (a, b), то вона називається *вгнутою догори* або просто вгнутою на цьому інтервалі. Іноді її ще називають *опуклою вниз* (рис. 20).

Якщо крива, яка є графіком функції $y = f(x)$, розміщена не вище будь-якої дотичної на інтервалі (a, b), то вона називається *вгнутою донизу* або просто опуклою на цьому інтервалі. Таку криву ще називають *опуклою вгору* (рис. 21). Точка

$M_0(x_0, f(x_0))$ називається точкою перегину гладкої кривої $y = f(x)$, якщо існує δ −окіл точки x_0 такий, що в інтервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ і $(x_0, x_0 + \delta)$ крива $y = f(x)$, має опуклість різних напрямків.

Теорема. *Нехай функція* $y = f(x)$, *визначена на інтервалі* (a, b) *і в кожній точці цього інтервалу має похідні до другого порядку включно. Тоді, якщо* $f''(x) > 0$ *у всіх точках* $x \in (a, b)$, *то графік функції* $y = f(x)$, *на інтервалі* (a, b) *вгнутий (опуклий вниз), якщо ж* $f''(x) < 0$ *у всіх точках* $x \in (a, b)$, *то графік функції опуклий (опуклий вгору).*

Установимо необхідну умову існування точки перегину графіка функції $y = f(x)$. Нехай функція $y = f(x)$ визначена і має неперервні похідні до другого порядку включно на інтервалі (a, b). Тоді. Якщо в кожній точці $x \in (a, b)$ $f''(x) > 0$, то графік функції $y = f(x)$ на інтервалі (a, b) вгнутий (опуклий вниз). Якщо $f''(x) < 0$, $x \in (a, b)$, – то графік опуклий (опуклий вгору).

Отже, якщо на інтервалі (a, b) $f''(x) \neq 0$, то графік функції $y = f(x)$ точок перегину на цьому інтервалі не має. Отже, умова $f''(x) = 0$ є необхідною, для того, щоб точка $M_0(x_0, f(x_0))$ була точкою перегину графіка функції $y = f(x)$.

Установимо достатню умову існування точки перегину графіка функції $y = f(x)$. Нехай точка $M_0(x_0, f(x_0))$ така, що $f''(x) = 0$ й існує таке δ, що в інтервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ і $(x_0, x_0 + \delta)$ друга похідна $f''(x)$ має різні знаки. Тоді точка $M_0(x_0, f(x_0))$ є точкою перегину.

Зауваження. Точка $M_0(x_0, f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$ і в тому випадку, коли в точці M_0 існує дотична до графіка функції $y = f(x)$, друга похідна в самій точці x_0 не існує, але існує в деякому δ-околі точки x_0, причому в інтервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ і $(x_0, x_0 + \delta)$ має різні знаки.

2. Асимптоти графіка функції

Пряма L називається асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо відстань від точки M кривої до прямої L при віддаленні точки M у нескінченність прямує до нуля.

Із наведеного означення випливає, що асимптоти можуть існувати лише у тих кривих, які мають як завгодно віддалені точки, тобто у "нескінчених" кривих.

Надалі розрізнятимемо похилі і вертикальні асимптоти. До похилих асимптот належать також і горизонтальні асимптоти.

Якщо функція $f(x)$ визначена на нескінченості і існують границі

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = b,$$

то пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою кривої $y = f(x)$ при $x \to \infty$.

Із означення асимптоти кривої $y = f(x)$ випливає, що пряма $x = a$ є вертикальною асимптотою, якщо принаймні одна з границь $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ або $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ рівна $+\infty$ або $-\infty$.

3. Загальна схема дослідження функцій і побудови їх графіків

При дослідженні функцій і побудові їх графіків може бути застосована, наприклад, наступна схема:

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти точки розриву та визначити їх тип.
3. Знайти асимптоти графіка функцій.
4. Знайти похідну функції і за її допомогою встановити інтервали зростання і спадання функції.
5. Знайти точки максимуму і мінімуму функції, а також максимальне й мінімальне значення функції.
6. Знайти другу похідну і за її допомогою визначити інтервали опуклості й точки перегину графіка функції.
7. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.
8. Враховуючи одержані результати, побудувати графік функції.