

Лекція 10. Границя функції в точці

План

1. Основні означення
2. Односторонні границі
3. Дві особливі границі
4. Нескінченно малі і нескінченно великі функції

1. Основні означення

Нехай задано дві непорожні множини X, Y , елементи яких можуть мати довільну природу. Якщо кожному елементу $x \in X$ за деяким правилом поставлено у відповідність єдиний елемент $y \in Y$, то говорять, що задано функцію $y = f(x)$.

Розглянемо деяку множину дійсних чисел E . Точка $x_0 \in E$ називається *ізольованою точкою* множини E , якщо існує деякий окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ в якому є лише одна точка $x_0 \in E$. Точка $x_0 \in E$ називається *точкою скупчення* множини E , якщо в будь-якому її окілі $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ міститься хоча б одна точка цієї множини відмінна від x_0 .

Означення за Коші. Число A називають *границею функції $f(x)$ в точці x_0* , яка є точкою скупчення в області визначення функції, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta > 0$, що для всіх значень x з області визначення функції, які задовольняють умову $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначення: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ або $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow x_0$.

Означення за Гейне. Число A називають *границею функції $f(x)$ в точці x_0* , яка є точкою скупчення в області визначення функції, якщо для будь-якої збіжної до x_0 послідовності $\{x_n\}$ відповідна послідовність значень функцій $\{f(x_n)\}$ збігається до A , тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Теорема Гейне. Обидва означення границі функції еквівалентні.

Число A називають *границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$* , якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta > 0$, що для всіх значень x з області

визначення функції, які задовольняють умову $|x| > \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначення: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ або $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow \infty$.

2. Односторонні границі

Число A називають *лівосторонньою границею функції $f(x)$ в точці x_0* , або *границею зліва*, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta > 0$, що для всіх x з області визначення функції, які задовольняють умову $x_0 - \delta < x < x_0$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначення: $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$.

Аналогічно вводиться поняття *правосторонньої границі*, яку позначають $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$. Ліву і праву границю називають *односторонніми*.

Теорема 2. Для того, щоб функція $f(x)$ у точці x_0 мала границю, необхідно і достатньо, щоб у цій точці існували лівостороння та правостороння границі, і щоб вони були рівні між собою.

При обчисленні границь зручно використовувати ряд **властивостей**:

I (арифметичні властивості границь)

Якщо існують $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ та $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, то

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow x_0} [c \cdot g(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ якщо } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0.$$

II (границя суперпозиції функцій)

Якщо існують скінченні границі $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$ та $\lim_{x \rightarrow a} f(t) = A$, то існує

границя складної функції $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = A$.

3. Дві особливі границі

Перша особлива (чудова) границя

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Наслідки першої особливої границі:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}.$$

Зауваження. За допомогою першої особливої границі можна досліджувати невизначеності виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ для виразів з тригонометричними функціями.

Приклад. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}.$

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\left(\frac{0}{0}\right)$. Використаємо першу визначну границю.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3.$$

Приклад. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}.$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{5x}{2x} \cdot \cos 2x \right] = \\ &= \frac{5}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Розглянемо **другу особливу границю**

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Наслідки другої особливої границі:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Зауваження: За допомогою другої особливої границі та її наслідків можна досліджувати невизначеності виду $\left(\frac{0}{0}\right)$; (1^∞) ; $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Приклад. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{x+3} \right)^{\frac{2x+5}{x+1}}.$

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{x+3} \right)^{\frac{2x+5}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{x+3} \right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+5}{x+1}} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x}} \right) \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + \frac{5}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right)} = \left(\frac{2}{1} \right)^{\frac{2}{1}} = 4.$$

4. Нескінченно малі і нескінченно великі функції

Функцію $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою в точці x_0* , якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) =$

0.

Функцію $f(x)$ називають *нескінченно великою в точці x_0* , якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty.$$

Теорема. Якщо $\alpha(x)$ нескінченно мала в точці x_0 функція, причому в околі точки x_0 $\alpha(x) \neq 0$, то функція $\frac{1}{\alpha(x)}$ у точці x_0 – нескінченно велика.

Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі в точці x_0 функції. Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} =$

0, то говорять, що $\alpha(x)$ в околі точки x_0 є *нескінченно малою вищого порядку* порівняно з $\beta(x)$ і пишуть $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$, де $C = \text{const}$, то функції $\alpha(x), \beta(x)$ називаються

нескінченно малими одного порядку в околі точки x_0 .

Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = C \neq 0$, де $C = \text{const}, k$ – додатне число, то функція

$\alpha(x)$ називається *нескінченно малою порядку k відносно нескінченно малої функції $\beta(x)$* .

Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \neq C$, то нескінченно малі функції $\alpha(x), \beta(x)$ називаються

непорівнянними в околі точки x_0 .

Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то функції $\alpha(x), \beta(x)$ називаються *еквівалентними*

нескінченно малими в околі точки x_0 . У цьому випадку пишуть $\alpha(x) \sim \beta(x)$.